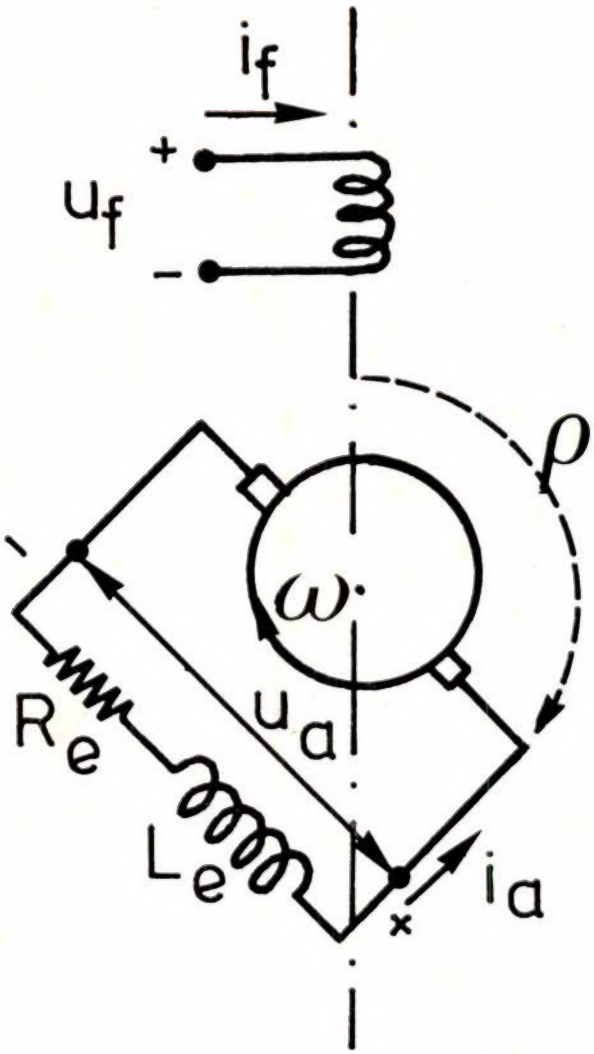
técnica



454 associação dos estudantes do instituto superior técnico
novembro 1979 revista de engenharia

SOMAPRE

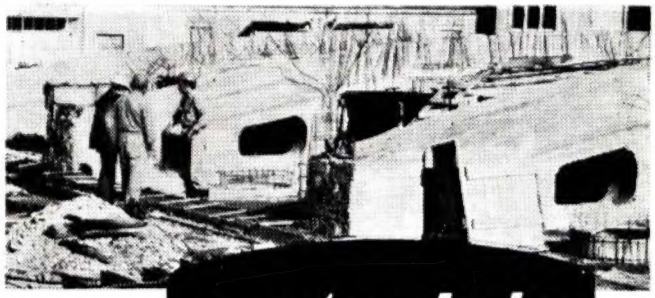
COBERTURAS
PARA TODOS OS FINS

SOMAPRE

SOCIEDADE DE MATERIAIS PRÉESFORÇADOS, S.A.R.L.
Av. da República, 83-2.º - tel. 76 00 45/6/7/8 - Lisboa

POST ESFORÇO «LOSINGER»

Sistema de post-esforço e ancoragens para rocha e aluviões.



materiais novobra

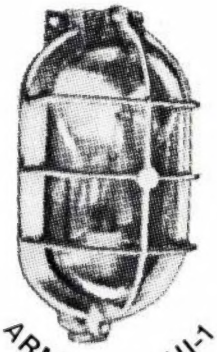
A mais vasta gama em pré-fabricados de betão.

Pavimentos, coberturas, asnas, perfis especiais, «post-esforço Losinger», pontões, vigas de grande vão, pórticos «Crendon», pavimento «Trief», protecção de segurança «Trief», mosaicos, tubos, blocos «Leca», espaçadores de betão, estacas para vinhas e pomares e pré-fabricação total ou parcial.

Fábricas em: Lisboa, Leiria, Lagoa, Guarda e Moita.

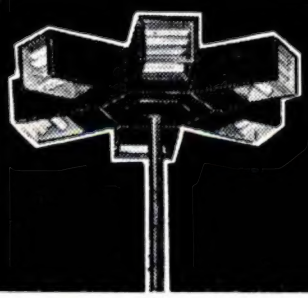
Sede: Av. Est. Unidos da América, 100-5.º Dt.º — Lisboa-5
Telefones — Serviços Administrativos: 77 48 32 - 77 29 53 • Telex: 18373 NOVOBA P
Serviços Técnicos: 89 41 16/7/8 - 89 93 31/2

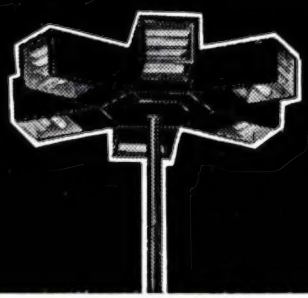
CONSTRUA COM CONFIANÇA - CONSULTE-NOS



ARMADURA HI-1

Iluminação
é o nosso ofício





SCHRÉDER, S.A.R.L.

Carnaxide — Tel. 218 00 37

técnica

NÚMERO 454 NOVEMBRO 1979 ANO LIV VOLUME XLI PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR
José Luís S. V. Azevedo

COLABORADORES
João José Águas
Sérgio Duarte Santos (F. C. Tecnologia — Coimbra)

FUNCIONÁRIOS
Jorge Graça
Fernanda Sanches

DIRECÇÃO, REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO
Av. Rovisco Pais, I.S.T.—1000 Lisboa
Telefone 88 93 23

PROPRIETÁRIO
A. E. I. S. T.

ASSINATURAS: 10 n.os

Continente e Ilhas	450$00
Países de Língua Portuguesa e Espanha	550$00
Estrangeiro	700$00 (US$15)
Número avulso ...	80$00

Encontram-se à venda na Secção Técnica, A. E. I. S. T., praticamente todos os números publicados até à data. Os preços são:

1 a 430 (inclusive) — 10$00 ex.
431 a 437 (») — 35$00 ex.
438 a 450 (») — 60$00 ex.
451 e seguintes — 80$00 ex.

* Excepto números duplos ou especiais.

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos autores.

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO:
OF. GRÁFICAS DE RÁDIO RENASCENÇA
Rua Duques Bragança, 6 — 1200 LISBOA

SUMÁRIO

59 — M. S. GARRIDO — Quelques remarques sur l'électromécanique quasi-stationnaire des milieux continus.

Algumas considerações sobre a electromecânica quasi-estacionária dos meios contínuos.

71 — F. LABRIQUE — Étude de la commutation dans une génératrice polyphasée à redresseurs.
Première partie — Analyse de la génératrice à couplages sinusoidaux.

Estudo da comutação num gerador polifásico com rectificação.
Parte I — Análise do gerador com estrutura sinusoidal.

83 — F. LABRIQUE — Étude de la commutation dans une génératrice polyphasée à redresseurs.
Deuxième partie — Étude de la génératrice à couplages triangulaires.

Estudo da comutação num gerador polifásico com rectificação.
Parte II — Análise do gerador com estrutura triangular.

97 — ISABEL LOURTIE, FRANCISCO CARVALHAL e PEDRO LOURTIE — Projecto apoiado em computador de sistemas de controlo.

Control systems design computer aided.

111 — J. SANTANA — Modelisation et stabilité de l'association onduleur de courant-machine asynchrone.

Modelação e estabilidade da associação ondulador de corrente-máquina assíncrona.

119 — M. S. GARRIDO — Étude analytique et application des équations variationnelles de la génératrice à redresseur.

Estudo analítico e aplicação das equações variacionais de geradores AC com saída rectificada.

CONSELHO CIENTÍFICO

Alves, Luís de Almeida
Barros, Luís A. Aires
Calado, Jorge C. G.
Conte, J. C.
Costa, Fernando Vasco
Dias, A. Romão
Domingos, J. J. Delgado
Faro, Manuel José de Abreu
Ferreira, J. Campos
Figanier, J. P.
Garrido, M. S.
Horta, Ricardo Bayão
Loureiro, A. Pádua
Manzanares, Alberto Abecassis
Moura, Domingos
Moura, J. M. Fonseca de
Moutinho, A. M. C.
Oliveira, E. R. de Arantes e
Portela, A. Gouvêa
Quintela, António de Carvalho
Rogado, José Quintino
Santos, A. F. Ferreira dos
Serafim, J. Laginha
Simões, F. Rebelo
Silva, J. Borges da
Tavares, L. Valadares
Trindade, Rocha

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
Aguiar & Melo, Lda.	VII
Construções Schréder	2.ª da capa
FÉRIA-SERIC, Lda.	II
MAGUE	III
Metropolitano de Lisboa	V
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Soc. Electricidade Brown Boveri	IV
Soc. Portuguesa Cavan	II
SOMAPRE	2.ª da capa
Sopecate	II
SOREFAME — Soc. Reunidas de Fabricações Metálicas, SARL	3.ª da capa
S. K. F., Lda.	I
TUDOR	VIII
YTONG PORTUGUESA	VI

Colabora neste número a seguinte Agência de Publicidade — HORA

SKF

A SKF não tem apenas rolamentos de esferas e de rolos .

Temos também rolamentos de agulhas

rótulas e embutes .

Evidentemente, temos do mesmo modo toda a espécie de acessórios para rolamentos.

Além disso a SKF fabrica muitos outros produtos de qualidade.

Rodas e carretos cónicos, por exemplo

Fusos roscados de rolamento de alta precisão que transformam o movimento de rotação em linear.

Fabricamos também machos cassonetes

e brocas .

O mesmo se passa com pontos rotativos .

E muitos sabem que também temos um bom Serviço Técnico.

SOCIEDADE SKF LIMITADA

LISBOA - PRAÇA DA ALEGRIA, 66-A
TELEF.: 362301 - TELEGR.: ESKAEF - TELEX: 12156

PORTO - RUA DELFIM FERREIRA, 604
TELEF.: 692054 - TELEGR.: ESKAEF

Av. Visconde Valmor, 76-1.º - Tel. 766014 (7 linhas) Lisboa-1

ESPECIALISTA DESDE 1947

sopecate

ESTUDOS
GEOTÉCNICOS

FUNDAÇÕES
ESPECIAIS

RUA DO ARSENAL, 146-2º
TELFS. 320208 · 360437 · 364010
LISBOA

Ventilação
de Edifícios
Ventilação Térmica
FÉRIA
(tipo shunt)

Com aprovação do
Laboratório Nacional
de Engenharia Civil
Câmara Municipal de Lisboa
Batalhão de Sapadores
Bombeiros
Direcção-Geral de Saúde

Exija o documento
de viabilidade de
utilização do L.N.E.C.

Consulte o Art.º 87 § 2
e Art.º 110 §§ 2 e 3
do R.G.E.U.

JÁ À VENDA

M. de ABREU FARO

PROPAGAÇÃO E RADIAÇÃO DE
ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

1 ONDAS E
MEIOS MATERIAIS

PREÇO: 560$00

DESCONTO:
10 % aos Assinantes

PEDIDOS À TÉCNICA

técnica

NÚMERO 454 NOVEMBRO 1979 ANO LIV VOLUME XLI

Quelques remarques sur l'électromécanique quasi-stationnaire des milieux continus

M. S. GARRIDO
Centro de Automática da Universidade Técnica de Lisboa
Faculté des Sciences Appliquées de Louvain-la-Neuve

RESUMO

O artigo mostra que, em electromecânica quasi-estacionária, é preferível adoptar, logo à partida, a relatividade galileana. A razão é que uma teoria mais geral a partir da qual se pudesse, de maneira consistente, deduzir a electromecânica quasi-estacionária, só poderá existir a um nível demasiado complexo para as aplicações.

Estas conclusões são obtidas a partir de uma nova formulação da mecânica dos fluidos incompressíveis, análoga à teoria do electromagnetismo, que permite um tratamento paralelo das duas disciplinas.

SUMMARY

It is shown that, in formulating quasistatic electromechanics, galilean relativity is preferably used from the start. This is because a more general theory from which electromechanics would have to be consistently derived could only exist at a level of excessive complexy in comparison with the requirements of applications.

This conclusion is reached by setting up a new formulation, similar to the electromagnetic theory, for incompressible fluid mechanics. This allows a parallel treatment of both theories.

1 — INTRODUCTION

Les notions de l'électromécanique des milieux continus utilisées en conversion d'energie (machines électriques, MHD, pompes électromagnétiques, etc.) se placent à un niveau où les phénomènes de propagation sont ignorés, parce-qu'ils jouent en rôle négligeable.

Par analogie avec la désignation adoptée en électromagnétisme, nous parlerons d'électromécanique quasi-stationnaire.

Cette branche de l'électromécanique, qui doit se placer au niveau de la physique dite pré-relativiste ou galiléenne pose un certain nombre de problèmes en ce qui concerne la cohérence des modèles mathématiques utilisés.

En effet on a d'abord mis ensemble les équations de la mécanique de Newton (qui sont du niveau galiléen) et les équations de l'électromagnétisme de Maxwell (qui sont du niveau relativiste), ce qui constitue une incohérence. Certes, on éliminait normalement le courant de déplacement dans les conducteurs, mais les équations électromagnétiques approchées ainsi obtenues n'étaient quand même pas compatibles avec la transformation de Galilée ni donc avec la mécanique de Newton.

C'est pourquoi un certain effort a été fait ensuite dans le but de formuler un électromagnétisme quasi-stationnaire vraiment galiléen.

On peut trouver l'essentiel de cette formulation de l'électromagnétisme dans les ouvrages didactiques **[1]**, **[2]** et dans les travaux de recherche **[3]**, **[4]**.

Malheureusement, un certain nombre de nouvelles difficultés vont apparaître après cette reformulation de l'électromagnétisme quasi-stationnaire.

En effet, si on fait une étude critique de la mécanique newtonienne à la lumière des nouveaux résultats obtenus pour l'électromagnétisme quasi-stationnaire, on est très

vite conduit à la conclusion que cette mécanique ne vas pas sans problèmes dans le cadre galiléen, certaines difficultés apparaissant au niveau des lois de transformation des grandeurs mécaniques.

Il en résulte qu'on est arrivé à se retrouver aujourd'hui avec le même type de problèmes qu'il y a quelques années, mais maintenant avec un électromagnétisme qui se prête bien à une formulation galiléenne et une mécanique qui, finalement, s'y intègre assez difficilement.

Ce très curieux renversement de situation est clairement montré dans la reférence **[3]**, à propos des formules de transformation de l'impulsion et de l'energie.

Dans ce travail, nous verrons que les difficultés ne se limitent pas aux formules de transformation de l'impulsion et de l'energie, mais qu'elles existent dejà pour les formules de transformation des variables mécaniques elles-mêmes.

Ainsi, nous commencerons par développer les équations quasi-stationnaires de la mécanique du continu, d'une façon originale, à notre connaissance, que les rends directement comparables aux équations quasi-stationnaires de l'électromagnétisme.

Ensuite, nous étudierons les formules galiléennes de transformation des variables électriques et mécaniques et nous identifierons les difficultés qui apparaissent au niveau de la mécanique.

Finalement, la nature de ces difficultés sera analysée et une solution sera proposée et comparée à d'autres solutions envisageables.

2 — LES ÉQUATIONS QUASI-STATIONNAIRES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME ET DE LA MÉCANIQUE

Les équations fondamentales de l'électromécanique des milieux continus sont les équations de l'électromagnétisme et les équations de la mécanique du continu, dûment completées avec des termes provenant du processus d'interaction électromécanique.

Nous allons nous occuper d'abord et essentiellement des équations purement électriques et des équations purement mécaniques et c'est seulement ensuite que nous introduirons le processus d'interaction électromécanique.

Pour alléger l'exposé, tout en gardant les aspects fondamentaux qui nous interessent, nous allons considérer des milieux relativement simples.

Ainsi, pour les équations électromagnétiques, nous admettrons l'existence de milieux conducteurs continus, mais nous n'envisagerons pas de matériaux magnétiques ou diélectriques.

Pour les équations mécaniques, nous allons nous intéresser à un milieu fluide incompressible et en régime isentropique. Ce milieu sera supposé continu, indéfini et au repos à l'infini, comme on le fait souvent en mécanique des fluides **[5]**.

Nous allons commencer par voir que, dans le cadre quasi-stationnaire, les lois de l'électromagnétisme et les lois de la mécanique peuvent en fait, être décrites par des équations identiques, malgré les très grandes différences qui apparaissent dans les formulations traditionnelles de ces deux disciplines.

Nous commencerons par poser une condition fondamentale, caractérisant tous les modèles galiléens:

$$c \rightarrow \infty \tag{1}$$

où c répresente la vitesse de propagation, aussi bien en électromagnétisme qu'en mécanique.

Remarquons que c'est cette condition qui permet de passer de la transformation de Lorentz à la transformation de Galilée **[3]** et non pas la condition $V^2 / c^2 \rightarrow 0$ que l'on utilise souvent, mais qui est insuffisante.

La condition (1), caractérisant l'espace-temps de Galilée, assure à elle seule le passage au niveau quasi-stationnaire, et est ainsi la première équation de l'électromécanique quasi-stationnaire.

Dans la formulation que nous allons proposer par la suite, les équations électromagnétiques et les équations mécaniques auront la même structure, qui est celle de la théorie classique de Maxwell, mais simplifiée par la condition fondamentale (1).

Pour ne pas devoir écrire deux fois les mêmes équations, nous allons adopter des lettres de l'alphabet manuscrit pour représenter, indifféremment, des champs électromagnétiques ou mécaniques et décrire en une fois, le formalisme.

Dans la théorie de Maxwelle on dispose d'un champ, décrit par quatre vecteurs $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{B}}$, et ayant comme sources deux grandeurs $\vec{j}, q$, que nous supposerons tendre régulièrement vers zéro à l'infini:

$$\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{B}}, \vec{j}, q \rightarrow 0 \tag{2}$$

Les équations d'évolution du système sont les équations de Maxwell

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \tag{3-a}$$

$$\nabla . \vec{\mathcal{D}} = q \tag{3-b}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \tag{3-c}$$

$$\nabla . \vec{\mathcal{B}} = 0 \tag{3-d}$$

auxquelles on ajoute les relations:

$$\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \tag{4-a}$$

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{\mathcal{H}} \tag{4-b}$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{\mathcal{E}} + \vec{V} \times \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{E}}^a) + q \vec{V} \tag{4-c}$$

où ε_0, μ_0 sont deux constantes universelles, electromagnétiques ou mécaniques; σ est un paramètre, élec-

trique ou mécanique, caractéristique du milieu matériel; $\vec{\mathcal{E}}^a$ est un champ appliqué, d'interaction; $\vec{V}$ est la vitesse du milieu matériel.

Nous pouvons remarquer que la loi d'Ohm (4-c) est plus simple qu'elle ne le serait sans la condition (1) qui élimine les corrections relativistes du second ordre $\sqrt{1-V^2/c^2}$.

On peut associer au champ deux potentiels $\mathcal{V}$, $\vec{\mathcal{A}}$ et obtenir une autre formulation qui utilise comme variables $\mathcal{V}$, $\vec{\mathcal{A}}$, q, $\vec{j}$ et comme sources $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{B}}$, ces grandeurs étant supposées tendre regulièrement vers zéro à l'infini:

$$\mathcal{V}, \vec{\mathcal{A}}, q, \vec{j}\ \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}, \rightarrow 0 \tag{5}$$

Dans cette formulation les équations d'évolution sont

$$\nabla \times \vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{B}} \tag{6-a}$$

$$\nabla \mathcal{V} + \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} = -\vec{\mathcal{E}} \tag{6-b}$$

$$\nabla . \vec{\mathcal{A}} = 0 \tag{6-c}$$

$$\nabla . \vec{j} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \tag{6-d}$$

où figure la condition de Maxwell (6-c) équivalente à celle de Lorentz, en conséquence de la condition (1).

Les équations (6) doivent être completées par les relations suivantes:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} = -\mu_0 \vec{j} \tag{7-a}$$

$$\nabla^2 \mathcal{V} = -\frac{q}{\varepsilon_0} \tag{7-b}$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{\mathcal{E}} + \vec{V} \times \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{E}}^a) + q \vec{V} \tag{7-c}$$

où les équations d'Alembert apparaissent degenérées en équations de Poisson, grâce à la condition (1).

Les équations précedentes ne peuvent pas determiner complètement l'évolution du champ, électromagnetique ou mécanique, parce qu'il manque encore une relation supplémentaire pour la vitesse $\vec{V}$ du milieu.

C'est à ce niveau que les formulations de l'électromagnétisme et de la mécanique quasi-stationnaires vont différer.

Pour l'électromagnétisme la vitesse $\vec{V}$ est une donnée extérieure, qui doit être connue explicitement en foncition de l'espace et du temps. Nous avons donc besoin d'une équation supplémentaire de la forme

$$\vec{V}_e = f(r, t) \tag{8-a}$$

où nous avons introduit l'indice e pour signaler qu'il s'agit de la vitesse figurant dans des équations (1) à (7) concernant un champ électromagnétique.

Pour la mécanique, par contre, la vitesse du milieu n'est pas une donnée extérieure, mais doit être fournie par les équations du champ mécanique lui-même. C'est ainsi que se manifeste le caractère non-linéaire de la mécanique, où on aura au lieu de (8-a) une nouvelle équation mécanique, qui est

$$\vec{V}_m = \vec{\mathcal{A}}_m \tag{8-b}$$

où nous avons utilisé l'indice m pour indiquer qu'il s'agit d'une relation valable lorsque les équations (1) à (7) concernent un champ mécanique.

Pour terminer cette introduction générale aux équations de l'électromécanique quasi-stationnaire signalons encore la manière d'introduire le processus d'interaction dans les équations électriques et mécaniques que l'on vient de voir.

D'abord, on fait l'hypothèse que la vitesse $\vec{V}_e$ du milieu électromagnétique est, simplement, la vitesse du milieu matériel mécanique $\vec{V}_m$, soit

$$\vec{V}_e = \vec{V}_m \tag{9}$$

ce qui élimine l'équation (8-a).

Finalment, on introduit dans les champs $\vec{\mathcal{E}}^a$ des termes d'interaction, comme par exemple, pour ce qui est des équations mécaniques, le champ de la force de Lorentz.

Nous reviendrons sur la question après avoir analysé plus en détail les équations électriques et mécaniques.

Compte tenu du formalisme quasi-stationnaire presenté pour l'électromagnétisme et pour la mécanique, nous pouvons préciser maintenant que la vitesse de propagation c introduite au début est donnée par

$$c = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \tag{10}$$

où ε_0, μ_0 sont les constantes universelles, électriques ou mécaniques, introduites dans les équtions (4) et qui seront identifiées plus loin.

La condition fondamentale $c \rightarrow \infty$ est donc équivalente à annuler une des constantes universelles $\varepsilon_0, \mu_0 \rightarrow 0$, ce qui nous permet de simplifier davantage les équations présentées.

Nous allons voir en quoi consistent ces simplifications supplémentaires des équations mécaniques et électriques et constater, en particulier, que les équations mécaniques sont effectivement équivalentes au équations classiques de la mécanique des fluides.

2.1 — Analyse des équations quasi-stationnaires de l'électromagnétisme

Pour analyser les équations (1) à (8) dans le cas de l'électromagnétisme nous devons, en principe, com-

mencer par faire correspondre les variables utilisées aux variables classiques de l'éelctromagnétisme. Il s'agit ici d'une identification, puisque les équation sont justement celles, bien connues de l'électromagnétisme.

C'est pourquoi nous nous limiterons à changer les notations pour adopter celles, aujourd'hui conventionnelles en électromagnétisme, $\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}$, $\vec{\mathcal{D}} = \vec{D}$, $\vec{\mathcal{H}} = \vec{H}$, $\vec{\mathcal{B}} = \vec{B}$, représentant les champs et les inductions, électriques ou magnétiques; $\vec{j} = \vec{j}$, $\varrho = \rho$ representant la densité de courant et la densité de charge eléctrique; $\mathcal{V} = \Phi$, $\vec{\mathcal{A}} = \vec{A}$ représentant les potentiels scalaire et vecteur du champ électromagnétique.

Les constantes universelles ε_0 et μ_0 sont, respectivement, la constante diélectrique et la permeabilité du vide qui, dans le modèle quasi-stationnaire, seront alternativement annulées.

Le paramètre σ est la conductibilité électrique, qui sera considerée comme une proprieté locale de la matière, transportée par celle-ci. Le déplacement mécanique, obtenu à partir de la vitesse $\vec{V}$, nous permettra donc de connaître à tout instant la distribution spatiale de σ.

Finalement, le champ appliqué $\vec{\mathcal{E}}^a = \vec{E}^a$ represente le champ électrique provenant d'interactions avec d'autres systèmes de nature physique différente, comme les champs d'origine chimique ou comme le champ piezoélectrique, d'origine mécanique (pour des milieux plus compliqués que celui consideré).

Pour l'electromagnétisme le champ $\vec{E}^a$ sera donné en chaque point fixe de la matière, ce qui nous permettra, la vitesse étant aussi donnée, de le considérer comme une fonction connue de l'espace et du temps:

$$\vec{E}^a = g(\vec{r}, t) \qquad (11)$$

La condition $c \to \infty$ ou $\varepsilon_0 \mu_0 \to 0$ permet la décomposition du système d'équations en deux systèmes plus simples, obtenus lorsque l'on fait tendre vers zéro chacune des constantes ε_0, μ_0.

Ainsi, si on annule la constante ε_0 on obtient une limite magnétique des équations, qui se prête bien à la description des systèmes inductifs; quand on annule la constante μ_0 on obtient une limite électrique, adaptée à la description des systèmes capacitifs.

Pour voir comment s'écrivent explicitement les équations correspondantes aux deux limites, considérons la formulation du type champ, donnée par les équations (3), (4).

Compte tenu des équations (4-a, b), les deux limites signifient l'annulation d'une des inductions $\vec{D}$ ou $\vec{B}$, de sorte que nous obtenons les équations.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{E} = 0 \qquad (12\text{-a})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \qquad \text{ou} \qquad \nabla . \vec{D} = 0 \qquad (12\text{-b})$$

$$\nabla . \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (12\text{-c})$$

auxquelles s'ajoutent les relations:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \qquad (13\text{-a})$$

ou

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} + \vec{E}^a) \qquad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^a) + \rho . \vec{V} \qquad (13\text{-b})$$

La vitesse est supposée connue s'il s'agit de l'étude d'un système purement électrique, ou donnée par les équations mécaniques s'il s'agit de l'un système électromécanique.

Analysons plus en détail les deux limites obtenues.

a) Limite magnétique

Nous commencerons par faire remarquer que dans la limite magnétique la densité de charge ρ est nulle, à la suite de l'annulation de l'induction électrique $\vec{D}$.

Il en résulte que le champ électrique $\vec{E}$ devient un simple auxiliaire de calcul, non determiné en dehors des conducteurs, mais fixé à l'intérieur de ceux-ci à travers la loi d'Ohm.

On pourra donc l'éliminer de la formulation en introduisant la loi d'Ohm dans la première équation de Maxwell et en ne gardant dans la formulation que les grandeurs vraiment caractéristiques de la limite magnétique, qui sont $\vec{H}$, $\vec{B}$ et $\vec{j}$, comme en magnétostatique

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ est determiné, dans cette formulation, mais le potentiel scalaire Φ subit le même sort que le champ électrique: il n'est determiné qu'à l'intérieur des conducteurs par la loi d'Ohm et cela à une constante près.

Remarquons que cette indetermination du potentiel scalaire n'est que la traduction mathématique d'un fait bien connu dans l'étude des circuits inductifs: l'impossibilité pratique de connaitre leur potentiel, qui doit être fixé en un point de chaque conducteur par des connexions à la terre.

b) Limite électrique

Pour la limite électrique, le champ magnétique $\vec{H}$ devient un auxiliaire de calcul, qui peut être éliminé en prenant la divergence de la troisième équation de Maxwell; de même, la densité de courant $\vec{j}$ peut être eliminée en introduisant la loi d'Ohm dans la même équation.

Les grandeurs caractéristiques de la limite électrique sont ainsi $\vec{E}$, $\vec{D}$ et ρ, comme en électrostatique.

Pour des conditions frontières nulles, le potentiel vecteur $\vec{A}$ s'annule avec l'induction $\vec{B}$. Le potentiel caractéristique de cette limite est donc le potentiel scalaire Φ, complètement determiné par les équations et conditions frontières.

Il est intéressant de considérer le cas des conducteurs parfaits, c'est-à-dire, $\sigma \to \infty$, ce qui annule les temps de relaxation.

Avec la condition $\sigma \to \infty$ la loi d'Ohm (13-b) donne immédiatement

$$\vec{E} + \vec{E}^a = 0 \qquad (14)$$

ce qui montre un équilibre parfait entre le champ électrique et le champ appliqué, supposé connu.

La densité de courant $\vec{j}$ est alors indeterminée, ce qui n'affecte pas la connaissance de la distribution de charge électrique ρ (et donc de $\nabla . \vec{j}$) complètement determinée par la connaissance de $\vec{E}$ en fonction du seul champ appliqué $\vec{E}^a$.

2.2 — Analyse des équations quasi-stationnaires de la mécanique

Considérons maintenant l'application des équations (1) à (8) à un système mécanique, constitué par un fluide incompréssible dont les caractéristiques ont été precisées plus haut.

Avant de passer à l'dentification des variables, nous allons faire sur la mécanique galiléenne, quelques remarques de caractère général, dont l'intérêt apparaitra plus loin.

Ainsi, nous rappellerons qu'au niveau de la mécanique galiléenne il y a une distinction, à priori, entre masse inertielle η_I et masse gravitationnelle η_G, l'identification des deux types de masse n'ayant lieu qu'à un niveau plus avancé de la physique.

Nous aurons besoin de cette distinction dans la formulation à developper par la suite.

La deuxième remarque concerne la notion classique de système mécanique. Nous allons considérer comme intrinseque à cette notion la possibilité d'identifier une certaine quantité de matière, ayant une certaine masse propre et de la suivre dans son mouvement.

Il en résulte que le flux de masse est dû uniquement à un processus de convection (contrairement à ce qui se passe en électromagnétisme, où l'existance de charges positives et negatives permet aussi un flux de charge par conduction), ce qui implique, finalement, la loi classique $\nabla . \eta \vec{V} + \partial \eta / \partial t = 0$ pour la conservation de la masse inertielle ou gravitationnelle.

Nous verrons plus loin comment cette contrainte, qui n'existait pas en électromagnétisme ,va être incluse dans le formalisme de Maxwell et comment elle s'articule avec l'équation de conservation intrinseque à ce formalisme.

Nous allons maintenant identifier les variables mécaniques intervenant dans les équations (1) à (8), ce qui doit être fait avec soin, puisque la formulation proposée est assez différente de la formulation classique: l'identification n'est donc pas immédiats.

Considérons d'abord l'équation (8-b), selon laquelle $\vec{\mathcal{A}} = \vec{V}$.

Dans cette équation $\vec{V}$ est la vitesse, au sens cinématique, associée au choix du referentiel galiléen et qui apparait aussi dans la loi d'Ohm électromagnétique. L'équation (8-b) transpose ce concept sur le champ physique et définit $\vec{\mathcal{A}}$ comme la vitesse, au sens mécanique (on verra que $\vec{\mathcal{A}}$ pourrait être consideré comme la limite, pour $c \to \infty$, de $\vec{V} / \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$, ce qui l'associe à la quadrivitesse).

À partir d'ici, l'équation (6-a) nous permet d'identifier le vecteur $\vec{\mathcal{B}}$ comme étant la vorticité $\vec{\Omega}$ du fluide, donc $\vec{\mathcal{B}} = \vec{\Omega}$.

La variable $\mathcal{q}$ peut être identifiée comme la densité de masse gravitationnelle, pour laquelle nous avons dejà adopté le symbole η_G. On a donc $\mathcal{q} = \eta_G$.

Finalement, le champ $\vec{\mathcal{E}}$ a dejà été utilisé sous le nom anglais de «protational field» **[6]**.

Quant aux autres variables $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{D}}$, $\vec{j}$, $\mathcal{V}$ elles n'ont pas été utilisées, sauf pour la limite statique, à voir plus loin, où $\mathcal{V}$ devient le potentiel gravifique de Newton, que nous representerons par φ_N et où $\vec{\mathcal{E}}$ devient donc le champ gravitationnel.

Avant le passage à la limite qui nous conduira à annuler l'une d'entre elles, les constantes universelles ε_0, μ_0 sont, respectivement, l'inverse G^{-1} de la constante (negative) de gravitation et la constante $G c^{-2}$. Nous continuerons à utiliser, par raison de simplicité, les notations ε_0, μ_0.

Le paramêtre σ constitue une mesure de la viscosité du fluide et il sera défini par $\sigma = (\mu_0 \nu)^{-1}$ où ν est la viscosité cinématique.

Remarquons que la notion de masse inertielle intervient dans ce paramêtre, puisque l'on a $\nu = \gamma / \eta_I$ où γ est le coefficient de viscosité.

Pour un fluide incompressible, la viscosité cinématique reste constante sur chaque point matériel du fluide. L'évolution du paramêtre σ, dans l'espace et le temps, est donc determinée par le déplacement mécanique, connu à partir de la vitesse, comme c'est le cas en électromagnétisme pour la conductibilité electrique.

Compte tenu de la nature du paramêtre σ, faisant intervenir la densité de masse inertielle η_I, son évolution est, en fait, une consequence de la conservation de la masse inertielle, qui intervient ainsi dans la processus.

Considérons, finalement, le champ appliqué $\vec{\mathcal{E}}^a$, qui doit traduire l'interaction du système mécanique avec d'autres systèmes de nature physique différente.

On y trouvera des termes comme, par exemple, le champ de la force de Lorentz intervenant dans une interaction électromécanique.

Mais le champ $\vec{\mathcal{E}}^a$ joue un rôle plus fondamental, en rapport avec la contrainte supplementaire dejà signalée concernant le flux de masse gravitationnelle.

En effet, on doit inclure un terme capable d'assurer la nature purement convective du flux de masse gravitationnelle, c'est-à-dire, d'assurer que dans l'équation de conservation de Maxwell (6-d) on ait $\nabla . \vec{j} = \nabla . (\eta_G \vec{V})$, soit, compte tenu de la loi d'Ohm (7-c):

$$\nabla . \sigma (\vec{\mathcal{E}} + \vec{V} \times \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{E}}^a) = 0 \qquad (15)$$

Nous postulerons que ce terme existe et est le champ de pression $- \nabla w = - \nabla p / \eta_I$, où w est l'enthalpie et p la pression. Ce terme n'est pas donné à priori, comme les autres termes possibles d'interaction, mais doit être obtenu simultannement avec l'évolution mécanique du système. Ceci introduit justement un degré de liberté supplémentaire dont on a besoin pour obtenir

avec les équations de Maxwell un flux de masse gravitationnelle purement convectif.

Après avoir procédé à l'identification des variables, nous allons étudier les deux limites imposés par la condition $\varepsilon_0 \mu_0 \to 0$.

Pour écrire explicitement les équations qui correspondent à ces deux limites, nous allons utiliser la formulation en fonction des potentiels données par les équations (5) à (7), car elle conduit plus directement aux résultats souhaités.

Nous aurons ainsi une limite cinétique, obtenue en annulant la constante ε_0, donc la densité de masse gravitationnelle η_G; et une limite statique, obtenue en annulant la constante μ_0, donc la vorticité $\vec{\Omega}$.

Pour abréger, nous utiliserons tout de suite l'équation (8-b) en remplaçant le potentiel vecteur $\vec{\mathcal{A}}$ par la vitesse $\vec{V}$. Cela nous donne les équations:

$$\nabla \times \vec{V} = \vec{\Omega} \qquad \nabla \times \vec{V} = \qquad (16\text{-a})$$

$$\nabla \mathcal{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\mathcal{E}} \quad \text{ou} \quad \nabla \mathcal{V} = -\vec{\mathcal{E}} \qquad (16\text{-b})$$

$$\nabla . \vec{V} = 0 \qquad \nabla . \vec{V} = 0 \qquad (16\text{-c})$$

$$\nabla . \vec{j} = 0 \qquad \nabla . \vec{j} + \frac{\partial \eta_G}{\partial t} = 0 \qquad (16\text{-d})$$

auxquelles s'ajoutent les équations

$$\nabla^2 \vec{V} = -\mu_0 \vec{j} \qquad \nabla^2 \mathcal{V} = -\frac{\eta_G}{\varepsilon_0} \qquad (17\text{-a})$$

ou

$$\vec{j} = \sigma (\vec{\mathcal{E}} + \vec{V} \times \vec{\Omega} + \vec{\mathcal{E}}^a) \qquad \vec{j} = \sigma (\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{E}}^a) + \eta_G \vec{V} \qquad (17\text{-b})$$

Analysons un peu plus en détail ces deux systèmes d'équations.

a) Limite cinétique

Cette limite, obtenue en annulant la constante ε_0, correspond à la limite magnétique de l'électromagnétisme, ce qui est en accord avec l'analogie classique de Maxwell pour les circuits.

À cette limite la masse gravitationnelle est annulée, mais la masse inertielle subsiste dans σ et dans w.

Le potentiel scalaire $\mathcal{V}$ n'est plus determiné par l'équation (7-b). En effet, $\mathcal{V}$ et $\vec{\mathcal{E}}$ sont devenus des auxiliares de calcul, determinés par la loi d'Ohm (17-b), mais que l'on peut éliminer de la formulation, si on veut seulement connaître les grandeurs caractéristiques du système qui sont $\vec{V} = \vec{\mathcal{A}}$, $\vec{j}$ et $\vec{\Omega}$.

En réalité, classiquement, le vecteur $\vec{j}$ n'est pas utilisé en mécanique des fluides. Il peut être mis en rapport avec la conservation du moment angulaire, mais cette question est sans importance pour les fluides isotropes que nous considérons ici.

Nous allons donc éliminer de la formulation non seulement $\mathcal{V}$ et $\vec{\mathcal{E}}$, mais aussi le vecteur $\vec{j}$.

Pour cela, on introduit (16-b) et (17-a) dans la loi d'Ohm (18-b), ce qui donne, en prenant le rotationnel:

$$\nu \nabla^2 \Omega - \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{V} \times \vec{\Omega}) + \nabla \times \vec{\mathcal{E}}^a = 0 \qquad (18)$$

qui est l'équation de diffusion de la vorticité.

Si on réduit $\vec{\mathcal{E}}^a$ au terme de pression $-\nabla$ w, on a $\nabla \times \vec{\mathcal{E}}^a = 0$, ce qui conduit à l'équation de diffusion classique.

Le comportement du système est décrit par l'équation (18), plus les équations (16-a, c), non encore utilisées.

Remarquons, finalement qu'il y a dans la formulation une équation de trop, comme en électromagnétisme: l'équation (16-d) est superflue et peut s'obtenir à partir de (16-c) et de (17-a).

Une fois $\vec{\Omega}$ et $\vec{V}$ determinés par les équations precedentes, on peut essayer d'exprimer $\mathcal{V}$ à partir de la loi d'Ohm. Pour cela, on élimine de cette dernière $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{j}$, par les équations (16-b) et (17-a), et on obtient l'équation de diffusion du potentiel vecteur $\vec{\mathcal{A}} = \vec{V}$:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \times \nabla \times \vec{V} + \nabla \mathcal{V} = -\nabla w + \nu \nabla^2 \vec{V} \qquad (19)$$

On reconnaît immédiatement l'équation classique de Navier-Stokes.

La connaissance de $\vec{V}$ nous fournit donc $\nabla (\mathcal{V} + w)$ soit, à une constante près à determiner par les conditions frontières, la somme des fonctions $\mathcal{V} + w$.

La séparation entre ces deux fonctions n'est pas necéssaire, au niveau des fluides incompréssibles, puisqu'elles ne figurent dans aucune équation autre que l'équation (19).

Mais si nous voulons garder pour l'enthalpie w la signification habituelle, nous devouns poser, en accord avec les relations classiques:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} V^2 + \varphi_{NO} \qquad (20)$$

où φ_{NO} sera le potentiel de Newton d'origine extérieur, c'est-à-dire, determiné par les conditions frontières. Mais ce dernier est nul dans notre cas, puisque nous avons adopté comme conditions frontières $\mathcal{V}$, $\vec{V} \to 0$.

Remarquons que l'expression $\mathcal{V} = \frac{1}{2} V^2$ qui provient de l'approche classique de l'étude des fluides et qui doit être postulée dans notre description des fluides incompressibles, possède, cependant, une signification assez générale. En effet, on peut montrer que dans une couche de transition entre deux vitesses, par exemple $\vec{V}_0 = 0$ et $\vec{V}$, le vecetur $\vec{j}$ crée un effet de double-couche responsable d'une variation de pontetiel scalaire qui est, justement, $\mathcal{V} - \mathcal{V}_0 = \frac{1}{2} V^2$.

En résumé, nous pouvons dire que la limite cinétique correspond bien à l'hydrodynamique classique. Les équa-

tions sont, simplement, écrites autrement, grâce à l'introduction de deux grandeurs auxiliaire $\vec{\mathcal{E}}$, $\mathcal{V}$ qui peuvent être éliminées et d'un vecteur intermédiaire $\vec{j}$, tel que $\frac{\vec{j}}{\sigma} = -\nu \nabla^2 \vec{V}$ represente le champ des forces de viscosité.

b) Limite statique

Cette limite, qui est l'analogue de l'électrostatique, s'obtient en annulant la constante μ_o.

La masse gravitationnelle subsiste dans le modèle et on n'aura plus besoin de la distinguer de la masse inertielle: $\eta_G = \eta_I$.

Compte tenu des conditions frontières, annulant $\vec{V}$ à l'infini, les équations (16-a) et (16-b) nous donnent comme solution $\vec{V} = 0$.

Nous avons donc un système au repos.

Les équations fondamentales sont (16-b) et (17-a), qui nous montrent que le potentiel scalaire $\mathcal{V}$ devient le potentiel de Newton φ_N et que le champ $\vec{\mathcal{E}}$ devient le champ gravitationnel.

Pour analyser la loi d'Ohm (17-b), nous devons commencer par constater que, d'après l'expression $\sigma = (\mu_o \nu)^{-1}$, le paramètre σ tend vers l'infini, puisque la limite statique correspond à l'annulation de la constante μ_o.

Il en résulte l'équilibre entre le champ gravitationnel et le champ des forces d'interaction:

$$\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{E}}^a = 0 \qquad (21)$$

À cause de la nature du terme figurant en $\vec{\mathcal{E}}^a$, ∇ w, qui n'est pas connu à priori et que l'on ne peut même pas expliciter en fonction des variables mécaniques du fluide incompréssible, la répartition de η_G ne s'obtient pas à partir des équations precédentes, comme c'était le cas en electromagnétisme. Elle est obtenue directement à partir de la condition (15) qui donne $\nabla . \vec{j} = \nabla . (\eta_G \vec{V}) = 0$, donc:

$$\frac{\partial \eta_G}{\partial t} = 0 \qquad (22)$$

comme il se doit pour un système parfaitement statique.

Ce résultat montre que $\vec{j}$ est, comme pour la limite analogue en électromagnétisme, une variable intermédiaire qui peut être eliminée de la formulation, les variables fondamentales étant $\mathcal{V}$, $\vec{\mathcal{E}}$ et η_G.

Signalons, comme remarque finale, que nous n'avons pas voulu déterminer $\vec{j}$, mais celà serais possible si l'on avait posé, au lieu de (15), la condition plus restrictive:

$$\mu_o \sigma (\vec{\mathcal{E}} + \vec{V} \times \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{E}}^a) = -\nabla^2 \vec{V} \qquad (15\text{-a})$$

ce qui nous donnerait alors $\vec{j} = \eta \vec{V} = 0$.

Mais cette condition (15-a) serait difficile à justifier, au niveau quasi-stationnaire, ne devenant claire qu'à un niveau beaucoup plus avancé.

2.3 — L'interaction électromécanique

Dans les paragraphes precédents nous avons analysé les équations électriques et mécaniques, sans nous préocuper du fait que les systèmes électrique et mécanique aient été isolés ou en interaction.

Precisons maintenant ce qu'il y a lieu de faire si les deux systèmes sont en interaction.

La première chose sera l'identification des vitesses figurant dans les équations électriques et mécaniques, comme dejà signalé, de sorte que l'on posera

$$\vec{V}_e = \vec{V}_m = \vec{V} \qquad (23)$$

où les indices e et m signifient qu'il s'agit des vitesses intervenant, respectivement, dans les équations électriques et mécaniques.

Le deuxième aspect de l'interaction concerne l'introduction, dans les champs appliqués $\vec{\mathcal{E}}^a$, des termes d'interaction.

Pour les milieux simples considerés, il n'y a pas de champ appliqué électrique en provenance de l'interaction électromécanique. Donc:

$$\vec{\mathcal{E}}^a_e = 0 \qquad (24\text{-a})$$

Par contre, du coté mécanique il y a un champ de force d'origine électromagnétique, que nous postulerons comme étant dû à la force de Lorentz.

La densité de force de Lorentz est $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{E}$ où les deux termes ne coexistent pas lors du passage à la limite. Il en résulte un champ appliqué $\vec{\mathcal{E}}^a_m$, tel que:

$$\eta_I \vec{\mathcal{E}}^a_m = \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{E} - \nabla \qquad (24\text{-b})$$

où η_I répresente la densité de masse inertielle.

L'évolution du système électromécanique est complètement determinée par les équations électriques et mécaniques, completées par les relations (23) et (24).

Nous n'allons pas nous étendre sur l'étude de l'interaction électromécanique, dans la mesure où les conclusions sont classiques et independantes de la formulation particulière que nous avons adoptée.

3 — FORMULES DE TRANSFORMATION

Les équations precédentes, comme toutes les équations de la physique, doivent être invariantes lors d'un changement de référentiel, par translation uniforme.

Considérons, par exemple, les équations (3-a) et (3-b) supposées écrites pour un certain referentiel R:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \qquad (25\text{-a})$$

$$\nabla . \vec{\mathcal{B}} = 0 \qquad (25\text{-b})$$

Dans un autre référentiel R', en translation uniforme par rapport à R, on doit avoir:

$$\nabla' \times \vec{\mathcal{E}}' = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}'}{\partial t} \qquad (26\text{-a})$$

$$\nabla' . \vec{\mathcal{B}}' = 0 \qquad (26\text{-b})$$

où $\vec{\mathcal{E}}'$ $\vec{\mathcal{B}}'$ sont les champs et ∇' $\frac{\partial}{\partial t'}$ les operateurs différentiels dans le référentiel R'.

L'invariance des équations impliquera normalement que les grandeurs $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}$ se transforment elles-mêmes, lors du changement de référentiel, c'est-à-dire, que $\vec{\mathcal{E}}' \neq \vec{\mathcal{E}}$ **et** $\vec{\mathcal{B}}' \neq \vec{\mathcal{B}}'$.

Pour trouver les lois de transformation galiléennes, qui nous interessent, nous partons des lois de transformation de l'espace-temps de Galilée, qui sont

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}_o t \qquad (27\text{-a})$$

$$t' = t \qquad (27\text{-b})$$

où $\vec{r}, \vec{r}'$ est le vecteur position; t, t' le temps; et V_o la vitesse de translation du référentiel R' par rapport à R.

À partir des relations (27) nous pouvons établir les lois de transformation des opérateurs différentiels ∇ et $\frac{\partial}{\partial t}$, lors du changement de référentiel. On établit, sans difficulté **[3]**:

$$\nabla' = \nabla \qquad (28\text{-a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_o . \nabla \qquad (28\text{-b})$$

Si on introduit ces résultats dans les équations (25) et que l'on compare à (26), on obtient

$$\nabla' \times [\vec{\mathcal{E}}' - (\vec{\mathcal{E}} + \vec{V}_o \times \vec{\mathcal{B}})] = -\frac{\partial}{\partial t} [\vec{\mathcal{B}}' - \vec{\mathcal{B}}] \qquad (29\text{-a})$$

$$\nabla' . [\vec{\mathcal{B}}' - \vec{\mathcal{B}}] = 0 \qquad (29\text{-b})$$

Les relations (29) étant valables dans tout l'espace et à tout instant, il est habituel de postuler tout de suite que les lois de transformation sont celles qui annulent les termes entre crochets, c'est-à-dire, $\vec{\mathcal{B}}' = \vec{\mathcal{B}}$, etc.

Mais nous devons analyser plus soigneusement les lois de transformation, à cause des difficultés qui vont apparaitre au niveau de la mécanique.

Nous poursuivrons donc l'étude precédente, pour les équations (3-b) et (3-c), ce qui donnera:

$$\nabla' . [\vec{\mathcal{D}}' - \vec{\mathcal{D}}] = [q' - q] \qquad (30\text{-a})$$

$$\nabla' \times [\vec{\mathcal{H}}' - (\vec{\mathcal{H}} - \vec{V}_o \times \vec{\mathcal{D}})] = [\vec{j}' - (\vec{j} + q\vec{V}_o)] + \frac{\partial}{\partial t'} [\vec{\mathcal{D}}' - \vec{\mathcal{D}}] \qquad (30\text{-b})$$

La loi d'Ohm nous permet d'obtenir la relation

$$[\vec{j}' - (\vec{j} + q\vec{V}_o)] = \sigma \{[\vec{\mathcal{E}}' - (\vec{\mathcal{E}} + \vec{V}_o \times \vec{\mathcal{B}}) + \vec{V}' \times [\vec{\mathcal{B}}' - \vec{\mathcal{B}}]\} + [q' - q] \vec{V}' \qquad (31)$$

où $\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_o$ et où on a utilisé l'hypothèse habituelle $\vec{\mathcal{E}}'^a = \vec{\mathcal{E}}^a$.

Finalement, les relations (4-a) et (4-b) nous donnent

$$[\vec{\mathcal{D}}' - \vec{\mathcal{D}}] = \varepsilon_o [\vec{\mathcal{E}}' - \vec{\mathcal{E}}] \qquad (32\text{-a})$$

$$[\vec{\mathcal{B}}' - \vec{\mathcal{B}}] = \mu_o [\vec{\mathcal{H}}' - \vec{\mathcal{H}}] \qquad (32\text{-b})$$

Compte tenu de l'approximation $c \to \infty$, nous savons dejà que les champs $\vec{\mathcal{D}}', \vec{\mathcal{D}}$ et $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{B}}'$ ne coexistent pas. On peut donc remplacer (32) par:

$$[\vec{\mathcal{D}}' - \vec{\mathcal{D}}] = \varepsilon_o [\vec{\mathcal{E}}' - (\vec{\mathcal{E}} + \vec{V}_o \times \vec{\mathcal{B}})] \qquad (33\text{-a})$$

$$[\vec{\mathcal{B}}' - \vec{\mathcal{B}}] = \mu_o [\vec{\mathcal{H}}' - (\vec{\mathcal{H}} - \vec{V}_o \times \vec{\mathcal{D}})] \qquad (33\text{-b})$$

Si nous observons les équations (29) à (33), nous constatons qu'elles forment un ensemble d'équations de Maxwell, pour les champs entre crochets $[\vec{\mathcal{E}} - (\vec{\mathcal{E}}' + V_o \times \times \vec{\mathcal{B}})]$, $[\vec{\mathcal{D}}' - \vec{\mathcal{D}}]$, etc.

Si nous faisons maintenant l'hypothèse heuristique que les conditions initiales ainsi que les conditions frontières pour ce nouveau champ sont nulles, on conclut que la solution sera nulle, puisqu'il n'y a pas de sources dans le système (supposé stable).

Il en résulte, donc, les relations

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}} + \vec{V}_o \times \vec{\mathcal{B}} \qquad (34\text{-a})$$

$$\vec{\mathcal{D}}' = \vec{\mathcal{D}} \qquad (34\text{-b})$$

$$\vec{\mathcal{H}}' = \vec{\mathcal{H}} - \vec{V}_o \times \vec{\mathcal{D}} \qquad (34\text{-c})$$

$$\vec{\mathcal{B}}' = \vec{\mathcal{B}} \qquad (34\text{-d})$$

$$\vec{j}' = \vec{j} + q\vec{V}_o \qquad (34\text{-e})$$

$$q' = q \qquad (34\text{-f})$$

qui sont les lois de transformation lors du changement de référentiel.

Les lois precédentes sont en accord avec l'expérience, aussi bien en électromagnétisme qu'en mécanique

quasi-stationnaires et peuvent donc être acceptées comme les formules de transformation valables dans le cadre galiléen.

Les difficultés annoncées au début vont apparaître avec les formules de transformation des potentiels $\mathcal{V}'$ et $\vec{\mathcal{A}}'$, que nous allons établir maintenant.

Pour cela, appliquons la méthode d'étude précédente aux équations (6-a) et (6-b). Après des calculs relativement simples on arrive aux équations:

$$\nabla' \times [\vec{\mathcal{A}}' - \vec{\mathcal{A}}] = [\vec{\mathcal{B}}' - \vec{\mathcal{B}}] \qquad (35\text{-a})$$

$$\nabla' [\mathcal{V}' - (\mathcal{V}' - \vec{V}_o \cdot \vec{\mathcal{A}}] = -\frac{\partial}{\partial t'} [\vec{\mathcal{A}}' - \vec{\mathcal{A}}] -$$

$$-[\vec{\mathcal{E}}' - (\vec{\mathcal{E}} + \vec{V}_o \times \vec{\mathcal{B}})] \qquad (35\text{-b})$$

qui sont les équations des potentiels associés aux champs des équations (30) à (33).

Si on fait l'hypothèse que les conditions initiales et les conditions fontières sont nulles pour ces potentiels, on arrivera aux formules de transformation cherchées en annulant les termes entre crochets des équations (35).

Les résultats obtenus sont corrects pour l'eléctromagnétisme, où nous aurons, en effet:

$$\vec{\mathcal{A}}'_e = \vec{\mathcal{A}}_e \qquad (36\text{-a})$$

$$\mathcal{V}'_e = \mathcal{V}_e - \vec{V}_o \cdot \vec{\mathcal{A}}_e \qquad (36\text{-b})$$

Par contre, en mécanique, les équations (36) sont tout à fait fausses. En effet, il suffit de rappeler l'équation mécanique $\vec{\mathcal{A}}_m = \vec{V}$ et l'expression générale du potentiel scalaire $\mathcal{V}_m = \frac{1}{2} V^2 + \varphi_N$, pour conclure que l'on doit avoir les formules de transformation

$$\vec{\mathcal{A}}'_m = \vec{\mathcal{A}}_m - \vec{V}_o \qquad (37\text{-a})$$

$$\mathcal{V}'_m = \mathcal{V}_m - \vec{V}_o \cdot \vec{\mathcal{A}}_m + \frac{1}{2} V_o^2 \qquad (37\text{-b})$$

Cela signifie que les potentiels $[\vec{\mathcal{A}}' - \vec{\mathcal{A}}]$ et $[\mathcal{V}' - (\mathcal{V} - \vec{V}_o \cdot \vec{\mathcal{A}})]$ ne sont pas nuls, mais constants et qu'ils ont les valeurs respectives $-\vec{V}_o$ et $\frac{1}{2}\vec{V}_o^2$.

L'origine de ces difficultés, analogue à celles rencontrées quand on étudie les équations de conservation de l'energie et de l'impulsion **[3]**, est ici immédiatement detectée.

Elles viennent de l'hypothèse que les conditions frontières et initialles sont nulles pour les potentiels $[\vec{\mathcal{A}}' - \vec{\mathcal{A}}]$ et $[\mathcal{V}' - (\mathcal{V} - V_o \cdot \mathbf{A})]$.

Or, compte tenu des équations $\vec{\mathcal{A}}_m = \vec{V}$ et $\mathcal{V}_m = \frac{1}{2} V^2 + \varphi_N$ un changement de référentiel doit être acompagné d'un changement de conditions frontières sur les potentiels $\mathcal{V}'$ et $\vec{\mathcal{A}}$.

Cela veut dire que les conditions frontières

$$\vec{\mathcal{A}}_m \to 0 \qquad \mathcal{V}_m \to 0 \qquad (38)$$

ne sont valables que pour le référentiel où la matière se trouve au repos à l'infini.

Pour tout autre référentiel ,animé d'une vitesse $\vec{V}_o$ par rapport au premier, les conditions frontières doivent être

$$\vec{\mathcal{A}}'_m \to -\vec{V}_o \qquad \mathcal{V}' \to \frac{1}{2} V_o^2 \qquad (39)$$

où $-\vec{V}_o$ représente, finalement, la vitesse de la matière à l'infini.

Si nous postulons les conditions frontières (39) pour les potentiels, au lieu des conditions particulières (38) initialement adoptées, les formules de transformation (37) sont alors justifiées vis à vis des formules (36) obtenues pour l'électromagnétisme. Les termes supplémentaires constants qu'elles contiennent proviennent du changement des conditions frontières, que ajoutent justement aux potentiels auxiliaires $[\vec{\mathcal{A}}' - \vec{\mathcal{A}}]$ et $[\mathcal{V}' - \vec{V}_o \cdot \vec{\mathcal{A}}]$ les valeurs $-\vec{V}_o$ et $\frac{1}{2} V_o^2$.

Les champs ne sont pas affectés par des constantes figurant dans les potentiels, ce qui explique pourquoi les formules de transformation correspondantes étaient correctes.

La solution qui consiste à postuler les conditions frontières (39) nous parait être la seule possible, dans un cadre strictement galiléen, mais nous pourrions envisager d'autres manières de procéder, que nous verrons par la suite.

4 — DIFFICULTES D'UNE EXTENSION RELATIVISTE RESTREINTE

L'utilisation des conditions frontières (39) n'est pas tout à fait satisfaisante, en particulier parce que les conditions apparaissent comme arbitraires, à priori, et ne trouvent une justification qu'après avoir determiné pour les potentiels des expressions en fonction de la vitesse.

Il est possible de retrouver les mêmes résultats par une autre voie, qui a l'avantage de rendre plus claire la question des conditions frontières, mais qui a l'inconvenient de sortir du cadre strict de la physique galiléenne et devient donc plus compliquée.

Le modèle que nous avons presenté pour l'électromécanique, constitue le passage à la limite $c \to \infty$ du modèle de Maxwell pour l'électromagnétisme, qui est au départ invariant pour la transformation de Lorentz.

Ainsi, au lieu d'étudier les formules de transformation après le passage à la limite, comme nous l'avons fait, il serait possible d'établir les formules de transformation d'abord, en travaillant avec la transformation de Lorentz au lieu de celle de Galilée et de faire ensuite le passage à la limite.

En adoptant cette voie, on retrouverait sans difficulté les formules de transformation des champs (34) qui sont simplement les limites pour $c \to \infty$ des formules relativistes correspondantes **[7]**.

Voyons en quoi cette méthode pourrait éclaircir la question des conditions frontières pour les pontentiels.

Pour ce qui est des potentiels de nature électromagnétique, on continuerait à poser les conditions frontières

$$\mathcal{V}'_e \to 0 \qquad \vec{\mathcal{A}}_e \to 0 \tag{40}$$

et les formules relativistes nous donneraient, après le passage à la limite

$$\mathcal{V}'_e = \mathcal{V}_e - \vec{V}_o \cdot \vec{\mathcal{A}}_e \tag{41-a}$$

$$\vec{\mathcal{A}}'_e = \vec{\mathcal{A}}_e \tag{41-b}$$

qui sont les résultats delà connus.

Pour ce qui est des potentiels de nature mécanique, on utiliserait comme conditions frontières dans le référentiel où la matière se trouve au repos à l'infini, non plus

Avec ces conditions frontières, la solution galiléenne

$$\mathcal{V}_m \to c^2 \qquad \vec{\mathcal{A}}_m \to 0 \tag{42}$$

Avec ces conditions frontières, la solution galiléenne pour le potentiel scalaire deviendrait $\mathcal{V}_m = \varphi_N + \frac{1}{2}V^2 + c^2$. Lors d'un changement de référentiel, les formules relativistes donneraient en passant à la limite

et en utilisant $\lim_{c \to \infty} c^2 / \sqrt{1 - \frac{V_o^2}{c^2}} = c^2 + \frac{1}{2}V_o^2$:

$$\vec{\mathcal{A}}_m = \lim_{c \to \infty} \left(\frac{\vec{\mathcal{A}}'_m}{\sqrt{1 - \frac{V_o^2}{c^2}}} + \frac{\mathcal{V}'_m V_o}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V_o^2}{c^2}}} \right) = \vec{\mathcal{A}}'_m + \vec{V}_o \tag{43-a}$$

$$\mathcal{V}_m = \lim_{c \to \infty} \left(\frac{\mathcal{V}'_m}{\sqrt{1 - \frac{V_o^2}{c^2}}} + \frac{\vec{\mathcal{A}}'_m \cdot \vec{V}_o}{\sqrt{1 - \frac{V_o^2}{c^2}}} \right) = \mathcal{V}'_m + \vec{\mathcal{A}}' \cdot \vec{V}_o + \frac{1}{2}V_o^2 \tag{43-b}$$

qui sont bien les résultats corrects.

Lors d'un changement de référentiel les conditions frontières (42) se transformeraient selon les mêmes formules (43) et on obtiendrait:

$$\mathcal{V}'_m \to c^2 + \frac{1}{2}V_o^2 \qquad \vec{\mathcal{A}}'_m \to -\vec{V}_o \tag{44}$$

On retrouverait ainsi directement les changements de conditions frontières que nous avons dû postuler au niveau galiléen.

On voit, donc, qu'il est possible de rendre plus claire, la question des conditions frontières et des formules de transformation pour les potentiels.

Cependant, malgré cet avantage, la méthode nous parait avoir des inconvénients majeurs, au niveau galiléen.

Tout d'abord, à cause de son excessive lourdeur et de la necessité de sortir du cadre simple de la transformation de Galilée, en passant au cadre plus complexe de la transformation de Lorentz.

En second lieu, parce que on doit admettre un potentiel scalaire $\mathcal{V}'_m = \varphi_N + \frac{1}{2}V^2 + c^2$ qui, à la limite, tend vers l'infini avec le terme c^2 (même si une telle proprieté disparait dans les équations du système, eliminée par les opperateurs differentiels qui agissent sur $\mathcal{V}'_m$).

Par contre, la méthode serait intéressante si on pouvait formuler une électromécanique du niveau de la relativité restreinte où on n'imposerait plus la condition $c \to \infty$ et, en particulier, où on aurait plus besoin de distinguer la masse inertielle de la masse gravitationnelle, dans la mesure où cette dernière ne serait jamais annulée.

Dans ce cadre, l'électromécanique quasi-stationnaire apparaitrait comme une simple approximation de cette formulation plus générale, point de vue adopté vis-à-vis de l'électromagnétisme par la majorité des auteurs, qui néglige tout souci de formuler un électromagnétisme galiléen.

Malheureusement, il n'est pas possible d'établir une formulation satisfaisante de l'électromécanique au niveau relativiste restreint.

En effet, le modèle proposé dans le paragraphe 2, qui peut être généralisé en électromagnétisme par suppression de la condition $c \to \infty$ (ce qui est d'ailleurs la forme habituelle de l'électromagnétisme), ne peut pas subsister en mécanique sans cette condition.

La difficulté vient de la seule équation qui distingue les formulations galiléennes de l'électromagnétisme et de la mécanique, c'est-à-dire de la condition supplementaire de la mécanique $\vec{\mathcal{A}}_m = \vec{V}$, laquelle ne peut pas être généralisée au niveau de la relativité restreint.

En effet, si on traite les équations de la mécanique d'un point de vue relativiste, par analogie avec l'électromagnétisme, on arrive à la conclusion que le potentiel vecteur devrait être de la forme

$$\vec{\mathcal{A}}_m = \vec{\alpha}_N + \frac{\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V_o^2}{c^2}}} \tag{45}$$

où le terme α_N est un potentiel retardé analogue au potentiel vecteur de l'électromagnétisme et est associé à un potentiel gravitique de Newton φ_N.

Or le terme α_N n'est pas lié à la vitesse par une relation locale, ce qui ne permet pas de définir $\vec{V}$ en fonction de $\vec{\mathcal{A}}_m$.

La relation (45) ne peut donc pas constituer l'équation supplémentaire dont on a besoin en mécanique.

Pour obtenir cette équation à partir de (45) il nous faut, en fait, annuler le potentiel $\vec{a}_N$.

Une façon de le faire est justement l'introduction de la condition $c \to \infty$, qui ne permet pas la coexistance du courant de masse garvitationnelle (qui est ici la masse potentiante) et du pontetiel $\vec{a}_N$, dans la mesure où cette condition annule, soit la masse, soit la constante μ_o.

Il en résulte que l'équation (45) peut être réduite au second terme lequel donne à la limite

$$\lim_{c \to \infty} \vec{a}_{;n} = \vec{V} \tag{46}$$

qui est justement l'équation utilisée.

Une deuxième façon de procéder, mais qui ne bénéficie pas de la cohérence de la precédente, est de négliger de façon arbitraire la partie des potentiels representée par φ_N et $\vec{a}_N$:

$$\varphi_N \approx 0 \qquad \vec{a}_N \approx 0 \tag{47}$$

ce qui transforme (45) en une relation locale permettant l'étude de la mécanique.

Dans ce cas on peut retrover à partir de la théorie de Maxwell les équations de la mécanique relativiste habituelle (restreinte) qui compte tenu de l'approximation (47) ne nous parait pas satisfaisante pour une généralisation cohérente de l'électromécanique galiléenne.

Une fois exclue la possibilité d'une électromécanique satisfaisante au niveau relativiste restreint, il nous reste une troisième voie qui serait d'avancer dans le sens de la relativité général, en absorbant les potentiels $\vec{a}_N$, φ_N dans la métrique.

Pour montrer que cette démarche serait possible, introduisons un quadricourant J^α tel que

$$J^\alpha = \eta_o u^\alpha - \varepsilon_o A^{\alpha;\beta}_{\ \ \beta} \tag{48}$$

où η_o est la densité de masse propre; u^α la quadrivitesse; et le dernier terme, une généralisation du «courant de conduction», défini par (15-a).

Le problème est de trouver une métrique qui rende compatibles: — l'équation des potentiels, qui s'écrit **[8]**

$$-A^{\alpha;\beta}_{\ \ \beta} + R^\alpha_\beta A^\beta = \frac{J^\alpha}{\varepsilon_o} \tag{49}$$

où A^α est le quadripotentiel et R^α_β le tenseur de Ricci; — et la condition

$$A^\alpha = c^2 u^\alpha \tag{50}$$

qui est la généralisation de l'équation (45), mais avec $\vec{a}_N = 0$ et $\varphi_N = 0$.

Si l'on introduit (48) en (49) et l'on tient compte de l'expression du tenseur impulsion-énergie:

$$T^\alpha_\beta = \eta_o c^2 u^\alpha u_\beta \tag{51-a}$$

$$T = T^\alpha_\alpha = -\eta_o c^2 \tag{51-b}$$

on obtient immédiatement, par utilisation de (50) e de $u^\alpha u_\alpha = -1$:

$$R^\alpha_\beta A^\beta = \frac{2}{-\varepsilon_o c^4}\left(T^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta T\right) A^\beta \tag{52}$$

qui est vérifié si

$$R^\alpha_\beta = \frac{2}{-\varepsilon_o c^4}\left(T^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta T\right) \tag{53}$$

Cette équation est l'équation d'Einstein, déterminant la métrique de la relativité générale, qui devrait donc permettre d'étendre notre modèle d'une façon cohérente, ce qui ne serait pas possible dans le cadre relativiste restreint.

En conclusion, une fois exclue la possibilité d'une électromécanique satisfaisante au niveau relativiste restreint, on se trouve devant l'alternative, soit de se contenter d'une formulation située dès le départ au niveau galiléen soit d'aller plus loin que la relativité restreinte, dans le sens de la relativité générale.

Cette dernière voie parait injustifiée, si le but poursuivi est de revenir, de toute manière, au niveau quasi-stationnaire, en vue des applications.

C'est pourquoi nous préferons la formulation complètement galiléenne, qui reste cohérente et commode, malgré les quelques inconvenients qui sont apparus plus haut.

En tout cas, et cela nous parait une conclusion importante, le niveau relativiste restreint, normalment adopté en électromagnétisme, est inadequat pour l'étude de l'électromécanique et ne devrait pas être adopté, notamment pour l'enseignement de cette branche.

5 — CONCLUSION

Le travail a examiné la structure des équations quasi-stationnaires de l'électromécanique.

Nous avons montré qu'il est préférable de définir le modèle quasi-stationnaire directement au niveau galiléen, plutôt que de le considérer comme une approximation d'un modèle plus général.

Pour arriver à cette conclusion nous avons developpé un modèle de la mécanique qui permet une comparaison directe avec l'électromagnétisme et donc un traitement en parallèle des deux branches.

Certaines difficultés concernant les lois de transformation en mécanique galiléenne, et qui avaient dejà été

mises en evidence pour l'energie et l'impulsion [3], sont ici abordées et expliquées au niveau plus fondamental des champs et des potentiels. L'energie et l'impulsion étant, au niveau pré-relativiste, de simples fonctions d'état associées à ces dernières grandeurs, leurs formules de transformation peuvent être considerées comme justifiées à partir de celles que nous avons obtenues.

Nous nous sommes limités à considerer des milieux très simples et dans des conditions peu complexes.

En particulier, nous avons consideré, pour la mécanique, un milieu indefini et au repos à l'infini dans un referentiel, qui est, en ce sens, un referentiel privilegié. On aurait pu se libérer de cette contingence, en considerant des milieux bornés, avec des conditions frontières quelconques.

Mais ces complications supplémentaires n'auraient changé ni les résultats ni les conclusions auxquelles nous sommes arrivés.

RÉFERENCES

[1] — **E. Levy & M. Panzer:** *Electromechanical Power Conversion*, Ed. McGraw-Hill, 1966.

[2] — **H. H. Woodson & J. R. Melcher:** *Electromechanical Dynamics*. Ed. John Wiley, 1968.

[3] — **P. Penfield & H. Haus:** *Electrodynamics of moving media*. Ed. M. I. T. Press, 1967.

[4] — **M. Le Bellac & J.-M. Levy Leblond:** *Galilean Electromagnetism*. Il Nuovo Cimento, vol. 148, n.º 2, 1973.

[5] — **Landau & Lifchitz:** *Mécanique des Fluides*. Ed. MIR, 1971.

[6] — **R. L. Forward:** *General relativity for the experimentalist*. Proc. IRE, 49, May 1961.

[7] — **W. Panofsky & M. Phillips:** *Classical electricity and magnetism*. Ed. Addison Wesley, 1962.

[8] — **C. Misner, K. Thorne & J. Wheeler:** *Gravitation*. Ed. Freeman, 1970.

Já pensou...

...que o seu anúncio
é muito eficaz se for
publicado na revista que
os seus clientes lêem?
Os milhares de exemplares
de cada número da nossa revista
são lidos por engenheiros
e técnicos, por pessoas ligadas
à indústria, à investigação, ao
ensino, pelos seus clientes,
em suma. Consulte-nos

técnica

REVISTA DE
ENGENHARIA Avenida Rovisco Pais — 1000 Lisboa — Telef. **88 93 23**

Etude de la commutation dans une génératrice polyphasée à redresseurs

Première partie:

Analyse de la génératrice à couplages sinusoïdaux

F. LABRIQUE
Premier Assistant
Université Catholique de Louvain

RESUMO

Este artigo é a primeira parte de um estudo da comutação dum gerador polifásico sem colector A partir do estudo de dois casos limite, o «sinusoidal» apresentado nesta primeira parte e o «triangular» apresentado na segunda parte, mostra-se que a forma das indutâncias mútuas, em função da posição, pode afectar consideravelmente o processo de comutação e, por conseguinte, a caracteristica externa do gerador.

Resultados experimentais confirmam as previsões teóricas.

ABSTRACT

This paper is the first part of a study on the commutation processes in a polyphase commutatorless D. C. generator. From the study of two limit cases, the «sinusoïdal» one presented here and the «triangular» one presented in the second part, it will be shown that the form of the variation of the mutual inductances as a function of the relative positions of the different coils can affect considerably the commutation processes and hence the generator output characteristic.

Experimental results on laboratory test machines confirm the theoritical analysis.

INTRODUCTION

Le développement des semiconducteurs de puissance a conduit à remplacer, dans certaines applications, le collecteur classique par un pont de redresseurs ou collecteur électronique. Les génératrices à diodes tournantes des systèmes d'excitation brushless constituent un exemple typique de cette technologie.

Si le mécanisme de la commutation a été largement étudié dans le cas des génératrices à redresseurs triphasées **[1, 2]**, il n'en va pas de même pour les génératrices à nombre plus élevé de phases qu'on trouve actuellement dans certains systèmes d'excitation **[3]**.

C'est à l'analyse d'une telle génératrice qu'est consacrée la présente étude. On considère le cas d'une machine à pôles lisses, sans amortisseurs, à induit polygonal et nombre pair de phases (fig. 1). Le nombre de phases doit être supérieur ou égal à 6 pour que la présente étude s'applique sans aucune restriction. La connexion en polygone des phases de l'induit est imposée par des raisons d'utilisation optimale des enroulements. Afin de montrer l'influence sur le comportement, de la forme des lois de couplage entre les enroulements, on considère deux cas extrêmes.

La première partie présentée ici est consacrée à l'étude du premier cas:

— couplage sinusoïdal «parfait» * entre les phases de l'induit

— couplage sinusoïdal entre les phases de l'nduit et l'inducteur

Dans une seconde partie, on examinera le second cas:

— couplage triangulaire entre les phases de l'induit et l'nducteur

* Par couplage «parfait», on entend un couplage dont la loit est telle que la mutuelle entre deux phases occupant la même position géométrique est égale ,en valeur absolue, à la self propre de chacune de ces phases.

Travail fait en collaboration avec Centro de Automática da Universidade de Lisboa (I. N. I. C.)
Manuscrito recebido para publicação em 10/7/78.

— couplage triangulaire «parfait» entre les phases de l'induit.

Le premier cas revient à considérer une machine ayant des enroulements de type alternateur et le second une machine possédant un induit de type dynamo et une force magnétomotrice d'inducteur quasi rectangulaire.

L'étude présentée est effectuée dans le cas du régime permanent. Une solution analytique du fonctionnement depuis la marche à vide jusqu'au court-circuit est obtenue en faisant les hypothèses et approximations suivantes:

— l'inducteur est alimenté par une source de courant

— le courant de sortie du pont est parfaitement lissé

— la résistance interne des phases de l'induit est négligeable

— la chute directe et le courant inverse des diodes sont négligeables.

1. EQUATIONS DE DÉPART POUR LA MACHINE À COUPLAGES SINUSOÏDAUX

Avec les notations de la figure 1 et un courant d'inducteur constant, la force électromotrice engendrée par l'inducteur dans chacune des n phases de l'induit peut s'écrire si l'on prend comme origine l'instant de couplage maximum entre la première phase et l'inducteur (passage de cette phase par l'axe neutre relatif à l'inducteur):

$$e_K = \dot{\theta}\, M_f\, i_f \sin\left[\theta - 2\,(K-1)\,\pi/n\right] \quad 1 \leqslant K \leqslant n \qquad (1)$$

Dans ces équations, M_f représente la valeur maximum de la mutuelle entre l'inducteur et une phase de l'induit, θ la position angulaire du rotor, $\dot{\theta}$ sa dérivée par rapport au temps et n le nombre de phases. Les mutuelles entre les phases de l'induit sont de la forme:

$$M_{ij} = M_o \cos\left[2\,(i-j)\,\pi/n\right] \quad 1 \leqslant i\,,\,j \leqslant n \qquad (2)$$

Dans ces équations M_o représente la valeur maximum de la mutuelle entre deux phases. Conformément à la définition du couplage parfait, cette valeur coïncide avec celle de la self propre, L, de chaque phase.

2. ANALYSE DU FONCTIONNEMENT

En passant de la marche à vide au court-circuit, on rencontre plusieurs modes de fonctionnement, chacun correspond à un mécanisme de commutation différent.

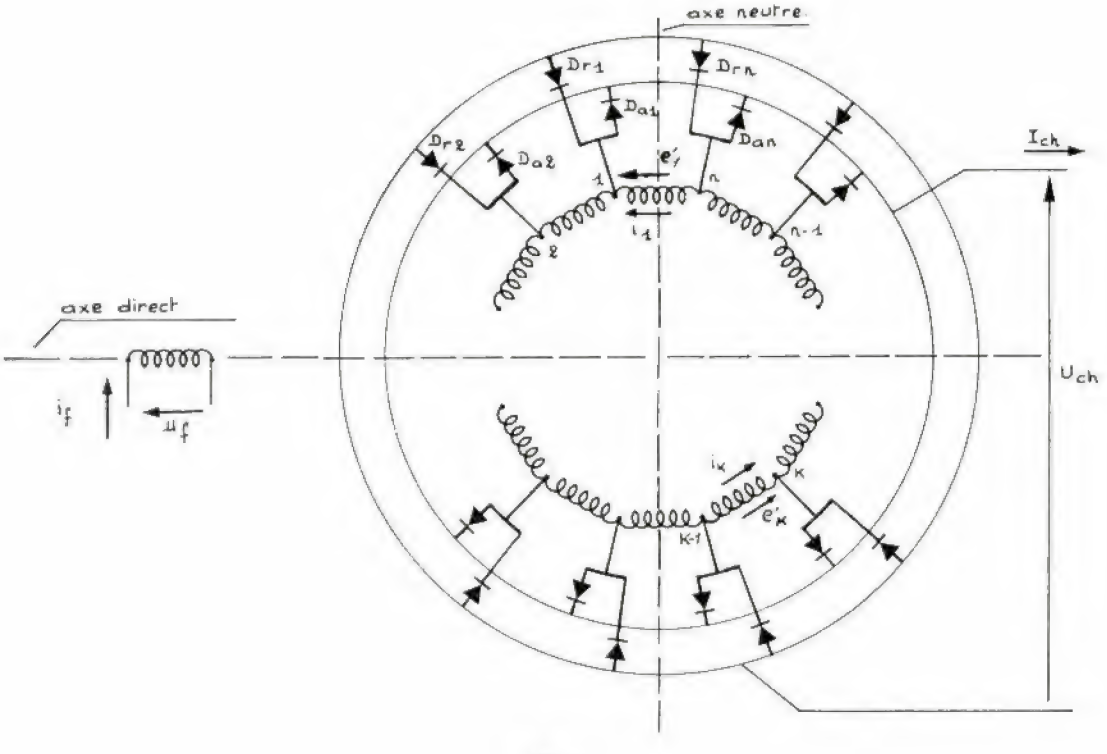


FIG. 1

C'est à l'étude des différents modes qui se succèdent et aux conditions de passage d'un mode au suivant qu'est consacré le présent paragraphe.

2.1. Fonctionnement à faible charge (mode 1)

Pour une telle charge, le comportement du redresseur est le suivant (fig. 2 a). A un moment donné, la borne de sortie positive du redresseur est reliée, par la conduction d'une des diodes à cathode commune, au sommet du polygone d'induit dont le potentiel est le plus élevé. D'une manière analogue, la borne de sortie négative du redresseur est reliée, par la conduction d'une diode à anode commune ,au sommet du polygone d'induit dont le potentiel est le plus bas. La connexion ainsi réalisée partage l'induit en deux voies, mises en parallèle, l'une (voie positive) comportant toutes les phases dont les forces électromotrices sont positives, l'autre (voie négative) toutes les phases dont les forces électromotrices sont négatives. Dans le cas du polygone à nombre pair de phases, considéré ici, chaque voie comporte n/2 phases et le courant se partage de manière symétrique entre les deux voies. Avec les sens de références choisis, on $a+I_{ch}/2$ dans chaque phase de la voie positive et $-I_{ch}/2$ dans chaque phase de la voie négative.

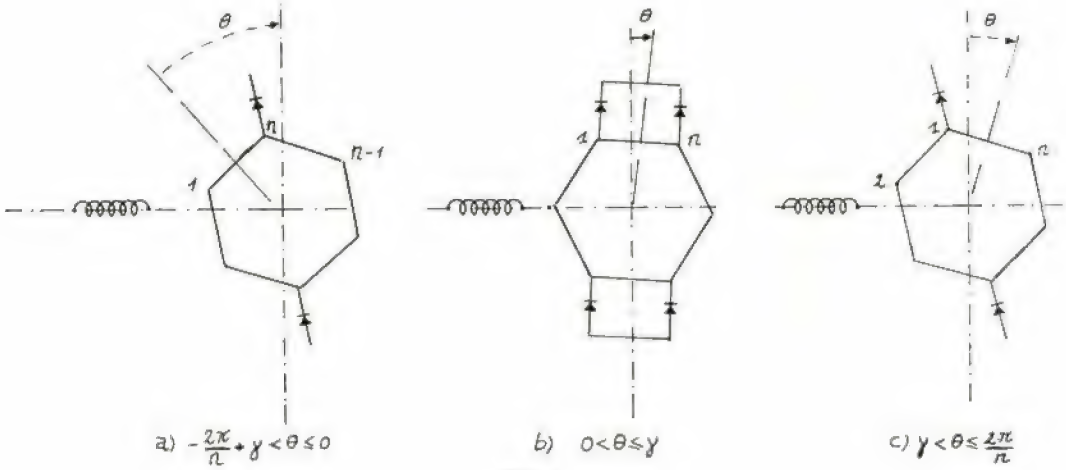


FIG. 2

Comme le courant de charge est supposé parfaitement lissé, et que la résistance des phases de l'induit est négligée, le passage du courant dans l'induit n'y entraîne aucune chute de tension et la force électromotrice totale de chaque phase coïncide avec la force électromotrice d'inducteur qui y est engendrée.

A la suite de la rotation de l'inducteur, tous les $2\pi/n$, il y a inversion de la polarité de la force électromotrice pour deux phases diamétralement opposées. Ces deux phases doivent changer de voie, ce qui signifie l'inversion du courant qui les traverse et le déplacement, d'un sommet au suivant, des liaisons du polygone d'induit avec le circuit extérieur. Compte tenu des inductances propres et mutuelles des phases considérées, l'inversion du courant ne peut s'y faire instantanément. Il y a un court-circuit transitoire de ces phases à travers les diodes qui doivent cesser de conduire et celles qui entrent en conduction (fig. 2 b). Ce phénomène constitue l'empiètement. Sa durée correspond à une rotation du rotor d'un angle, appelé angle d'empiètement.

Comme on se limite à étudier un fonctionnement en régime permanent, il est évident que l'évolution qui vient d'être décrite, n'est possible que si l'angle d'empiètement, soit γ, est inférieur à l'intervalle angulaire séparant deux commutations successives, soit $2\pi/n$.

Durant l'empiètement, par suite du couplage existant, les tensions aux bornes des phases non commutantes s'écartent des forces électromotrices correspondantes induites par l'inducteur. Toutefois, comme on le verra, cette modification, due à la variation du courant dans les phases en commutation, n'entraîne l'entrée en conduction d'aucune diode supplémentaire.

Afin de mettre le phénomène en équations, considérons la commutation qui transfère la phase 1 de la voie négative à la voie positive et la phase (n/2+1) de la voie positive à la voie négative. Compte tenu de l'origine qui a été choisie, on peut écrire durant l'empiètement le système d'équation suivant (fig. 3):

$$\begin{cases} \dot{\theta}M_f i_f \sin\theta = \dot{\theta}M_o \dfrac{di_1}{d\theta} + \dot{\theta}M_o \cos(\pi)\dfrac{di_{(n/2+1)}}{d\theta} \\ \dot{\theta}M_f i_f \sin(\theta-\pi) = \dot{\theta}M_o \cos(\pi)\dfrac{di_1}{d\theta} + \dot{\theta}M_o \dfrac{di_{(n/2+1)}}{d\theta} \end{cases} \quad (3)$$

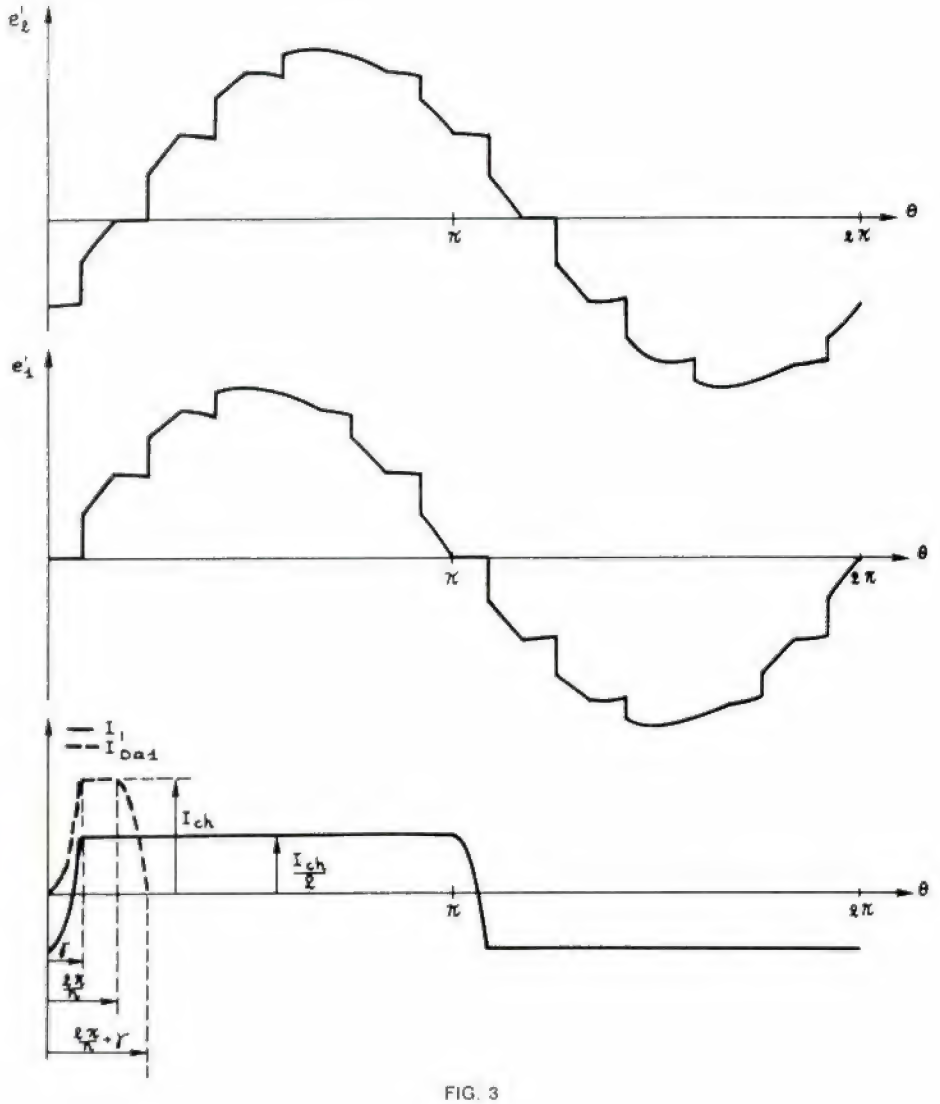


FIG. 3

Au début de la commutation, soit en $\theta=0$, les courants i_1 et $i_{(n/2+1)}$ valent respectivement $-I_{ch}/2$ et $+I_{ch}/2$. A la fin, soit en $\theta=\gamma$, leurs valeurs sont inversées. L'intégration du système (3) conduit aux expressions suivantes:

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{M_f i_f}{2\,M_o}(1-\cos\theta) - I_{ch}/2 \\ i_{(n/2+1)} = \dfrac{-M_f i_f}{2\,M_o}(1-\cos\theta) + I_{ch}/2 \end{cases} \qquad (4)$$

L'angle d'empiètement se deduit immédiatement de l'une ou l'autre des équations (4) et des valeurs finales du courant dans les phases commutantes:

$$\gamma = \text{arcos}\left(1 - \frac{2\,M_o\,I_{ch}}{M_f i_f}\right) \qquad (5)$$

Durant l'empiètement, les forces électromotrices totales aux bornes des phases non commutantes, soient e'_K, s'expriment par:

$$e'_K = e_K - M_o\dot{\theta}\cos\left[2\,(K-1)\,\pi/n\right]\frac{di_1}{d\theta}$$

$$-M_o\dot{\theta}\cos\left[2\,[K-(n/2+1)]\,\pi/n\right]\frac{di_{(n/2+1)}}{d\theta} \qquad (6)$$

Compte tenu de (1) et (4), l'équation (6) peut encore se mettre sous la forme:

$$e'_K = -\dot{\theta}\,M_f i_f \sin\left[2\,(K-1)\,\pi/n\right]\cos\theta \qquad (7)$$

Comme les phases entrent en commutation au passage par zéro de leurs forces électromotrices totales, cette équation montre que la commutation des phases 1 et $(n/2+1)$ déforme la tension aux bornes des autres phases en déplaçant leur passage par zéro de manière

MAGUE

"4 Guindastes eléctricos para o cais comercial do Porto de Aveiro:

– 1 Guindaste de 6 – 12t/24 – 20 m
– 3 Guindastes de 3 – 6t/24 – 20 m"

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

Equipamento Brown Boveri no mundo da tracçao

Equipamento eléctrico para automotoras a corrente contínua como por exemplo em composições do metropolitano, sistemas de tráfego veloz e de ligação de linhas ferroviárias de curta distância

compreendendo:

Motores de tracção
Regulação electrónica de velocidade (sistema «chopper») e travões automáticos
Sistema de comando sem contactos empregando elementos semicondutores
Equipamento de aquecimento e iluminação do comboio
Transmissão de informações comboio/via férrea para comando automático de tracção.

BROWN BOVERI

Representada em Portugal por:

Sociedade de Electricidade

Brown Boveri Limitada

Rua de Sá da Bandeira, 481-2°, Porto .

151661 b VI

telle que leur entrée en commutation est impossible tant que l'angle de fin d'empiètement est inférieur à $\pi/2$. Pour le mode de fonctionnement et les nombres de phases considérés, cette condition est verifiée puisque γ reste inférieur à $2\pi/n$.

La tension de sortie du pont redresseur soit U_{ch}, présente une ondulation rédiduelle de $2\pi/n$. Sur l'intervalle considéré, elle vaut:

— de 0 à γ

$$U_{ch} = -\sum_{2}^{n/2} e'_K \tag{8}$$

de γ à $2\pi/n$

$$U_{ch} = -\sum_{2}^{n/2+1} e'_K \tag{9}$$

La valeur moyenne, $\overline{U}_{ch}$, de la tension de sortie s'obtient en intégrant les équation (8) et (9) sur les intervalles correspondants. Elle est égale à:

$$\overline{U}_{ch} = \frac{n\,\dot{\theta} M_f i_f}{\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right) \tag{10}$$

En éliminant l'angle d'empiètement γ entre les équations (5) et (10), on obtient l'équation de la caractéristique externe durant le premier mode de fonctionnement. C'est un segment de droite d'équation (fig. 4):

$$\overline{U}_{ch} = \frac{n\,\dot{\theta} M_f i_f}{\pi} - \frac{n}{\pi} M_o\,\dot{\theta}\, I_{ch} \tag{11}$$

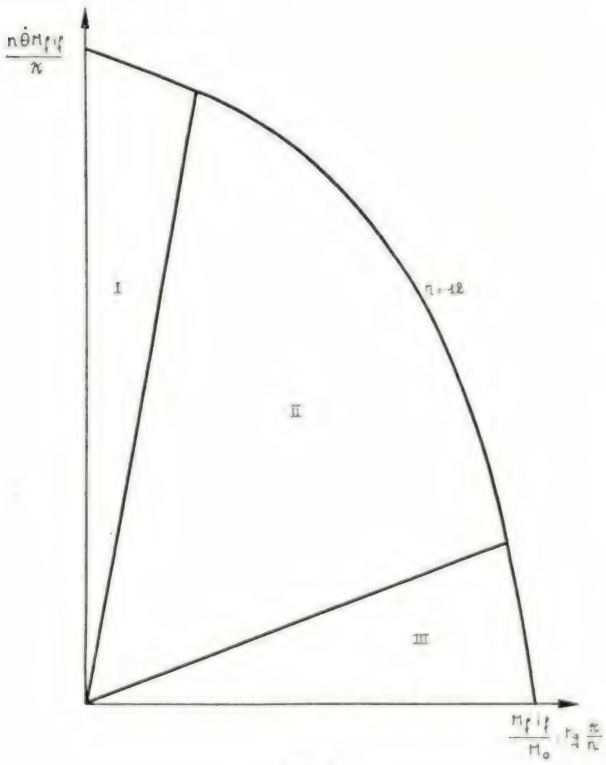


FIG. 4

Pour déterminer le courant dans les diodes raccordées à un sommet du polygone d'induit ,il suffit de faire la différence des courants circulant dans les phases qui y sont raccordées. Lorsque cette différence est positive, il y a passage d'un courant dans la diode à cathode commune. Lorsque cette différence est négative, il y a passage d'un courant dans la diode à anode commune.

Durant le premier mode, il y a successivement deux puis une diode en conduction à chaque borne de sortie du pont (fig. 2), chaque diode étant passante pendant un intervalle $2\pi/n+\gamma$ (fig 3). Le courant moyen dans chaque diode vaut I_{ch}/n tandis que le courant de crête atteint I_{ch}.

A la fin du mode 1, lorque γ atteint $2\pi/n$, le courant et la tension de sortie valent respectivement:

$$I_{ch} = \frac{M_f i_f}{M_o}\sin^2 \pi/n \tag{12}$$

$$U_{hc} = \frac{n\,\dot{\theta} M_f i_f}{\pi}\cos^2 \pi/n \tag{13}$$

2.2. Fonctionnement jusqu'au court-circuit: modes 2 et 3

Lorsque le courant de charge dépasse la valeur donnée par l'équation (12), il apparait un deuxième mode de commutation, à angle d'empiètement constant et égal à $2\pi/n$, durant lequel l'angle d'entrée en commutation de chaque phase se décale progressivement en arrière d'un angle β, par rapport à l'angle de passage de la phase par l'axe neutre d'inducteur (figs. 5 et 6).

Ce mode est la conséquence du fait que la commutation de deux phases diamétralement opposées empêche l'entrée en commutation des autres phases pourvu que l'angle de fin d'empiètement ne dépasse pas $\pi/2$, c'est-à-dire, tant que $\beta+\gamma \leqslant \pi/2$ [cf équation (7)]. L'angle β croît d'une valeur nulle à une valeur maximum, β_M, égale à:

$$\beta_M = \pi/2 - 2\pi/n \tag{14}$$

Durant le mode 2, il y a à tout instant une phase en commutation et deux diodes en conduction à chaque borne de sortie.

Pour écrire les équations relatives à ce fonctionnement, considérons à nouveau l'intervalle débutant avec l'entrée en commutation des phases 1 et $(n/2+1)$. Les équations qui régissent l'évolution des courants dans ces phases sont les mêmes que les équations (3). Toutefois, elles sont maintenant valables non plus sur l'intervalle $[0, \gamma]$ mais sur l'intervalle $[\beta, \beta+2\pi/n]$. On peut écrire après intégration:

$$i_1 = -i_{(n/2+1)} = \frac{M_f i_f}{2M_o}(\cos\beta - \cos\theta) - I_{ch}/2 \tag{15}$$

De cette équation on peut extraire la liaison existant entre le courant I_{ch} et l'angle de retard β, soit:

$$I_{ch} = \frac{M_f i_f}{M_o}\sin\pi/n\,\sin(\beta+\pi/n) \tag{16}$$

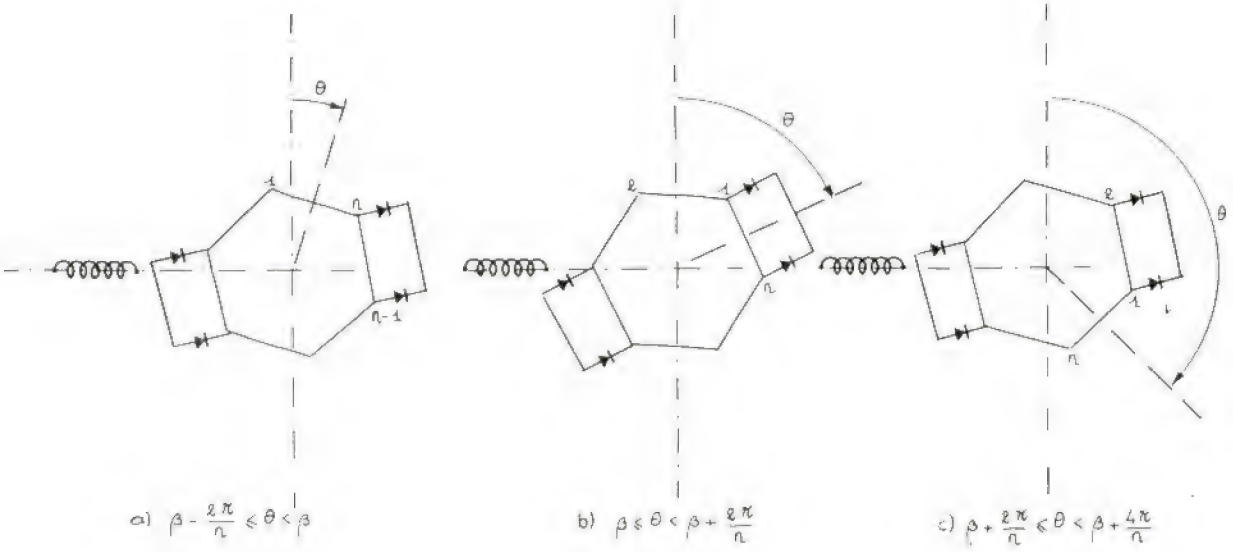

θ
1
n
n-1
2
a) $\beta - \frac{2\pi}{n} \leq \theta < \beta$
b) $\beta \leq \theta < \beta + \frac{2\pi}{n}$
c) $\beta + \frac{2\pi}{n} \leq \theta < \beta + \frac{4\pi}{n}$

FIG. 5

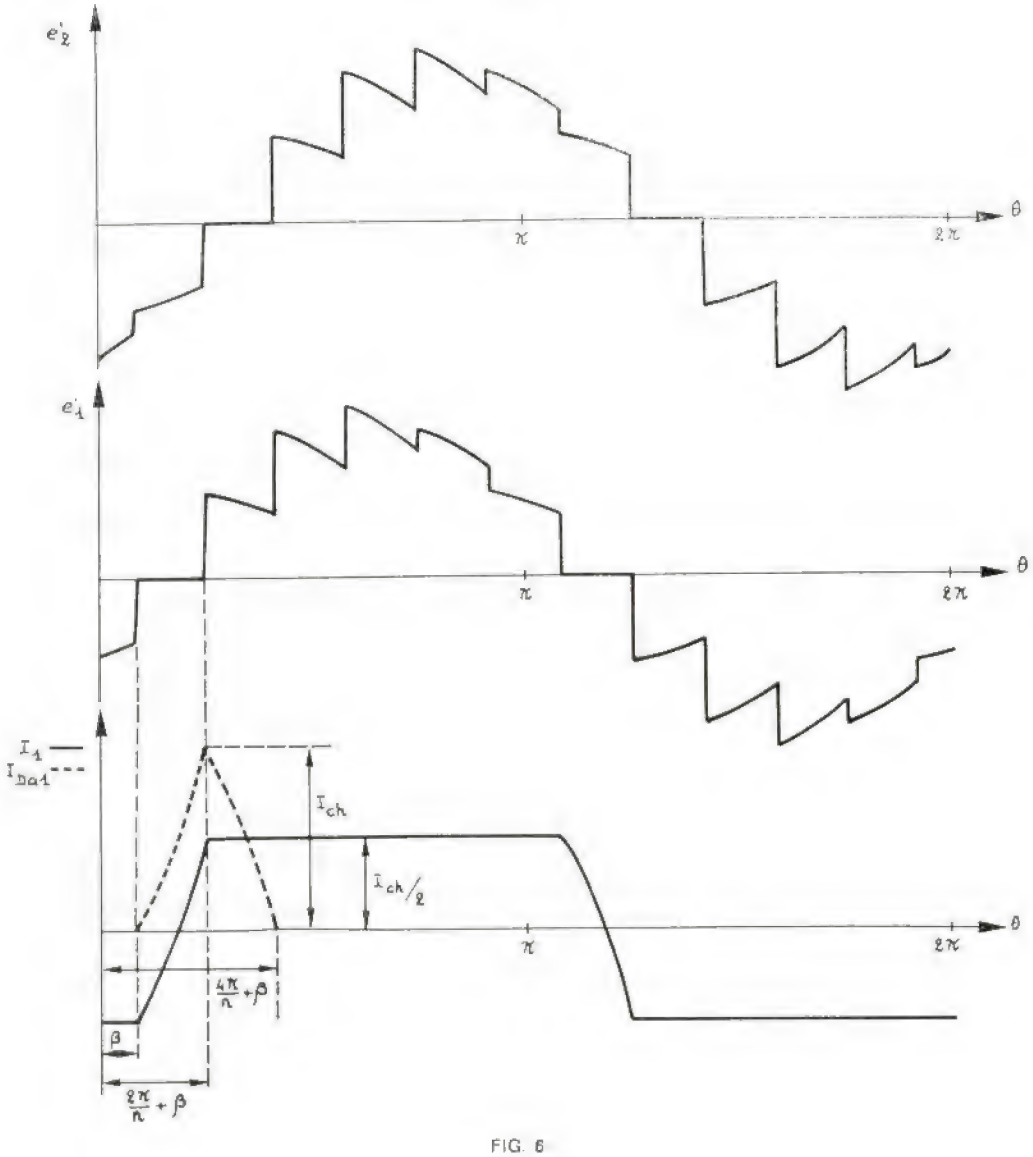

e'_2
e'_1
I_1
I_{Da1}
I_{ch}
$I_{ch}/2$
θ
π
2π
$\frac{4\pi}{n}+\beta$
β
$\frac{2\pi}{n}+\beta$

FIG. 6

La tension moyenne de sortie vaut:

$$\overline{U}_{ch} = \frac{n}{2\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi/n} -\sum_{2}^{n/2} e'_K \, d\theta$$

ce qui donne, après intégration,

$$\overline{U}_{ch} = \frac{n\dot{\theta} M_f i_f}{\pi} \cos \pi/n \cos(\beta + \pi/n) \qquad (17)$$

L'élimination de β entre (16) et (17) fournit l'équation de la caractéristique externe durant le mode 2 (fig. 4):

$$\overline{U}_{ch} = \frac{n\dot{\theta} M_f i_f}{\pi} \cos(\pi/n) \sqrt{1 - \left(\frac{M_o I_{ch}}{M_f i_f \sin \pi/n}\right)^2} \qquad (18)$$

c'est un tronçon d'ellipse qui joint le point:

$$\left[I_{ch} = \frac{M_f i_f}{M_o} \sin^2(\pi/n);\ \overline{U}_{ch} = \frac{n\dot{\theta} M_f i_f}{\pi} \cos^2(\pi/n)\right]$$

pour $\beta = 0$, au point:

$$\left[I_{ch} = \frac{M_f i_f}{2 M_o} \sin(2\pi/n);\ \overline{U}_{ch} = \frac{n\dot{\theta} M_f i_f}{2\pi} \sin(2\pi/n)\right]$$

pour $\beta = \pi/2 - 2\pi/n$ (fig. 4).

Durant ce mode, chaque diode est passante pendant $4\pi/n$ et conduit un courant moyen I_{ch}/n avec un courant de crête I_{ch}.

Au delà, apparaît un troisième mode, pour lequel il y a successivement deux, puis une phase en commutation à chaque borne de sortie (figs. 7 et 8). Durant le mode 3, l'angle d'entrée en commutation reste fixé à $\pi/2 - 2\pi/n$ en retard par rapport à l'axe neutre d'inducteur, tandis que l'angle d'empiètement se remet à croitre jusqu'à atteindre $4\pi/n$. Comme les forces électromitrices totales aux bornes des autres phases sont toutes nulles lorsqu'il y a deux phases en commutation à chaque borne de sortie, la fin du mode 3 correspond au court-circuit permanent de la génératrice.

Pour mettre en équations le fonctionnement de la génératrice durant le mode 3, considérons à nouveau l'instant d'entrée en commutation des phases 1 et $(n/2+1)$. Avec l'origine choisie, cette entrée se fait en $\pi/2 - 2\pi/n$. A ce moment les phases n et n/2 sont encore en empiètement. Il convient de distinguer 3 intervalles (fig. 7):

— de $\pi/2 - 2\pi/n$ à $\pi/2 + \gamma - 4\pi/n$

Durant cet intervalle, il y a commutation simultanée des phases 1 et n à la borne de sortie positive et des phases n/2 et $(n/2+1)$ à la borne de sortie négative. On peut écrire, en tenant compte de la symétrie existant eentre les courants dans les phases diamétralement opposées:

$$\frac{di_1}{d\theta} = -\frac{di_{(n/2+1)}}{d\theta} = -\frac{M_f i_f}{2 M_o \sin(2\pi/n)} \cos(\theta + 2\pi/n) \qquad (19)$$

$$\frac{di_n}{d\theta} = -\frac{di_{(n/2)}}{d\theta} = \frac{M_f i_f}{2 M_o \sin(2\pi/n)} \cos\theta \qquad (20)$$

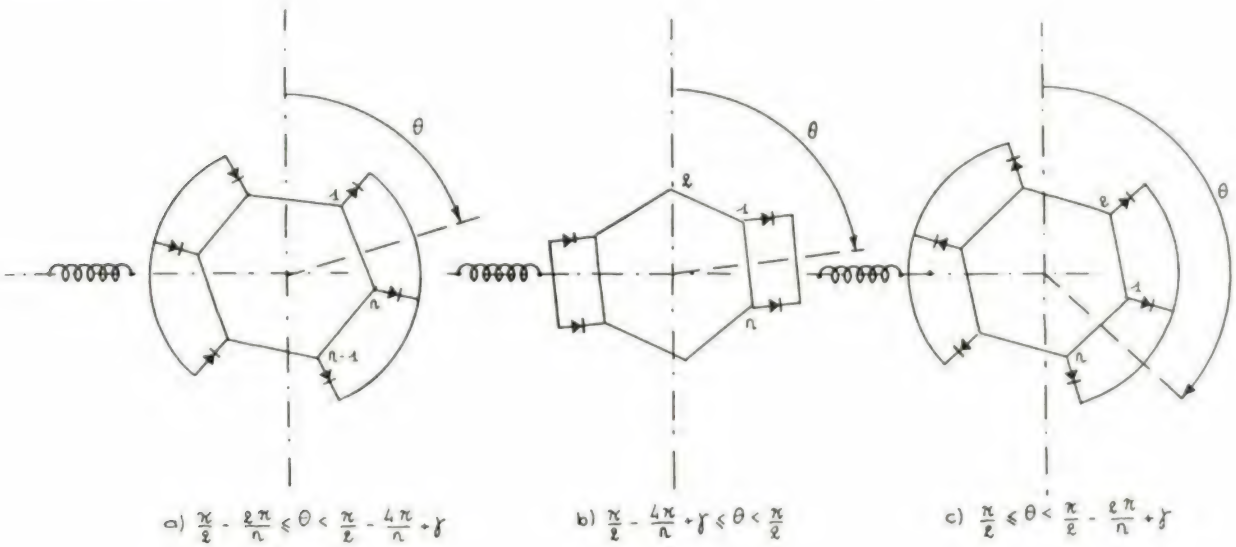


FIG. 7

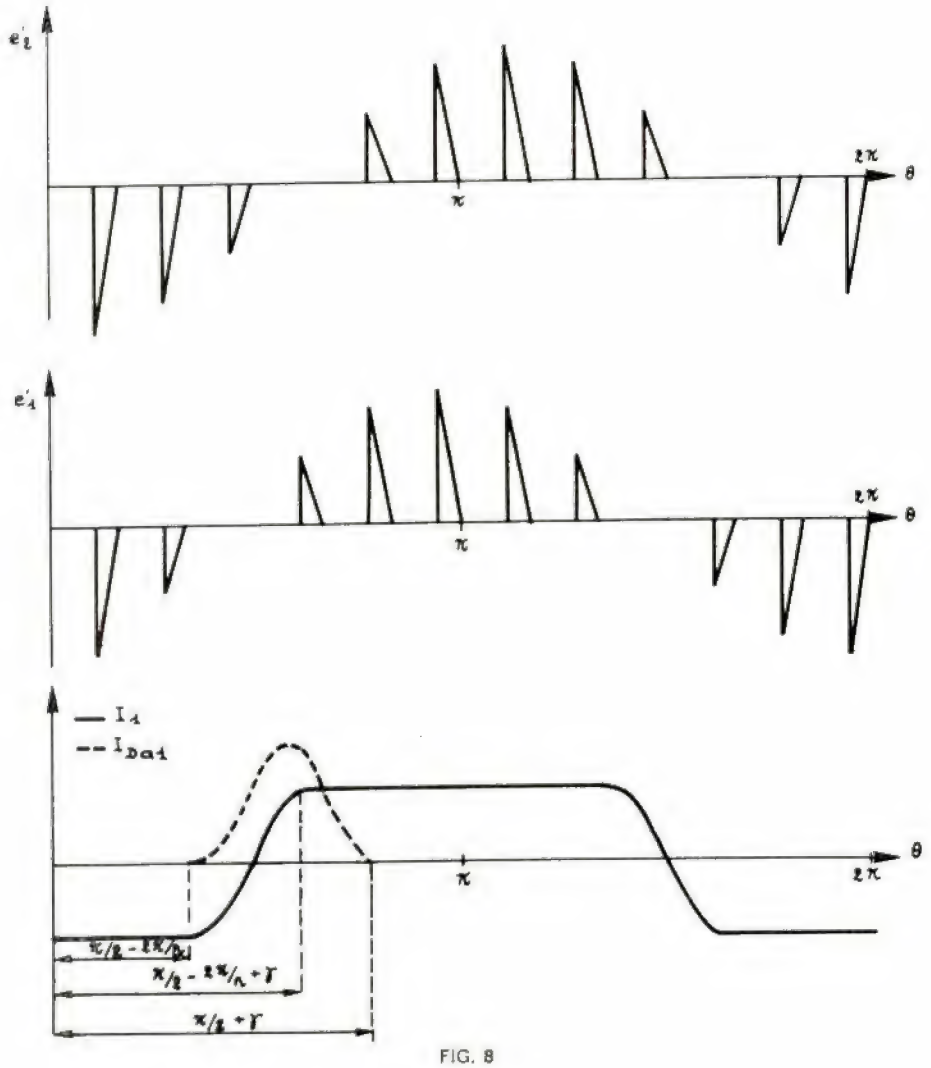


FIG. 8

— de $\pi/2+\gamma-4\,\pi/n$ à $\pi/2$

La commutation des phases n et (n/2) est achevée, celle des phases 2 et (n/2+2) n'a pas encore débutée. Durant cet intervalle, seules les phases 1 et (n/2+1) empiètent. Les équations qui déterminent l'évolution du courant dans ces phases sont les équations (3). On a donc

$$\frac{di_1}{d\theta} = -\frac{di_{(n/2+1)}}{d\theta} = \frac{M_f i_f}{2\,M_o}\sin\theta \qquad (21)$$

— de $\pi/2$ à $\pi/2-2\,\pi/n+\gamma$

C'est la fin de l'empiètement des phases 1 e (n/2+1) et le début de la commutation des phases 2 et (n/2+2). On pêut écrire

$$\frac{di_1}{d\theta} = -\frac{di_{(n/2+1)}}{d\theta} = \frac{M_f i_f}{2\,M_o \sin(2\,\pi/n)}\cos(\theta-2\,\pi/n) \qquad (22)$$

$$\frac{di_2}{d\theta} = -\frac{di_{(n/2+2)}}{d\theta} = -\frac{M_f i_f}{2\,M_o \sin(2\,\pi/n)}\cos\theta \qquad (23)$$

En intégrant les équations (19), (21) et (22) sur leurs intervalles respectifs et en tenant compte de la valeur initiale et de la valeur finale du courant dans la phase 1, on peut écrire la relation existant entre l'angle d'empiètement γ et le courant de charge I_{ch}, soit:

$$I_{ch} = \frac{M_f i_f}{2\,M_o}\,\mathrm{tg}\,(\pi/n)\,[1+\cos(4\,\pi/n-\gamma)] \qquad (24)$$

La tension moyenne de sortie vaut durant ce mode

$$\overline{U}_{ch} = \frac{n\,\dot{\theta}\,M_f i_f}{2\,\pi}\,\mathrm{cotg}\,(\pi/n)\,[1-\cos(4\,\pi/n-\gamma)] \qquad (25)$$

En éliminant γ entre (24) et (25), on obtient l'équation de la caractéristique externe durant le mode 3 (fig. 4):

$$\overline{U}_{ch} = \frac{n\,\dot{\theta}\,M_f i_f}{\pi}\,\mathrm{cotg}\,(\pi/n)\left[1-\frac{M_o I_{ch}}{M_f i_f}\,\mathrm{cotg}\,(\pi/n)\right] \qquad (26)$$

Durant ce mode, il y a successivement 3 puis 2 diodes en conduction à chaque borne de sortie. Chaque diode est passante pendant un intervalle $2\pi/n+\gamma$. Le courant moyen dans chaque diode vaut toujours I_{ch}/n tandis que sa valeur de crête, soit I_{dM}, atteint seulement:

— si $\gamma \leqslant 3\pi/n$

$$I_{dM}=\frac{M_f i_f}{2M_o}\left[\sin(4\pi/n-\gamma)+\frac{\cos(4\pi/n-\gamma)-\cos(2\pi/n)}{\sin(2\pi/n)}\right] \quad (27)$$

— si $\gamma > 3\pi/n$

$$I_{dM}=\frac{M_f i_f}{2M_o}\left[\sin(\pi/n)+\frac{\cos(\pi/n)-\cos(2\pi/n)}{\sin(2\pi/n)}\right] \quad (28)$$

Au court-circuit l'angle de conduction des diodes atteint $6\pi/n$.

3. INTERPRÉTATION DU FONCTIONNEMENT AU MOYEN D'UNE MACHINE À COURANT CONTINU ÉQUIVALENTE À LA GÉNÉRATRICE

La caractéristique externe obtenue (fig. 4) se compose d'un segment d'ellipse auquel se raccordent deux segments de droites qui lui sont tangents aux points de raccord. Cette caractéristique est, pour $n=6$, identique à celle du pont triphasé alimenté par des sources sans couplage mutuel. Ceci résulte du fait que, pour l'application considérée, une source triphasée d'impédance interne purement inductive et sans couplages peut se ramener à une source hexaphasée à couplage sinusoïdal parfait **[4]**.

Le comportement de la génératrice n-phasée à couplages sinusoïdaux qui vient d'être étudiée peut s'interpréter facilement en termes d'une machine à courant continu ayant n lames de collecteur, de largeur $2\pi/n$, et une paire de balais dont la largeur et la position sont fonction du courant de charge débité. La position des balais, définie comme celle de leur point milieu et leur largeur se déduisent de la position et de la largeur de l'intervalle de conduction des diodes.

Durant le mode 1, on assiste à un élargissement progressif des balais depuis une largeur nulle jusqu'à une largeur $2\pi/n$. L'origine des balais restant calée à la ligne neutre d'inducteur, leur déplacement par rapport à cette ligne neutre est égal à la moitié de leur largeur (fig. 9).

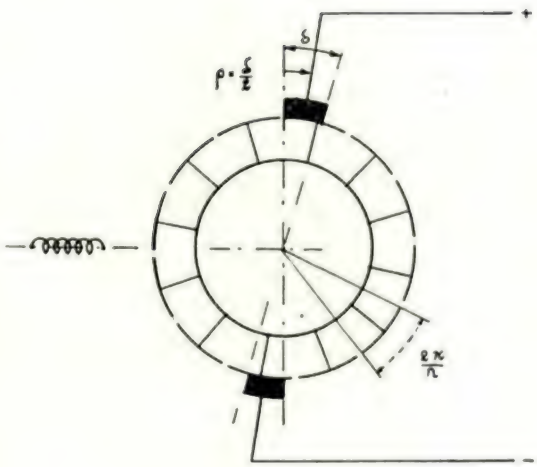


FIG. 9

Durant le mode 2, les balais gardent une largeur constante et égale à $2\pi/n$, tandis que leur position passe de π/n à $\pi/2-\pi/n$ du début à la fin du mode (fig. 10). Durant ce mode, pour chaque valeur de courant, les balais se placent dans une position telle que l'inducteur engendre dans la section en commutation une force électromotrice de commutation qui correspond au courant à commuter. C'est là un mécanisme de commutation analogue à celui qui a été réalisé dans les machines à courant continu sans pôles de commutation en décalant les balais par rapport à l'axe neutre.

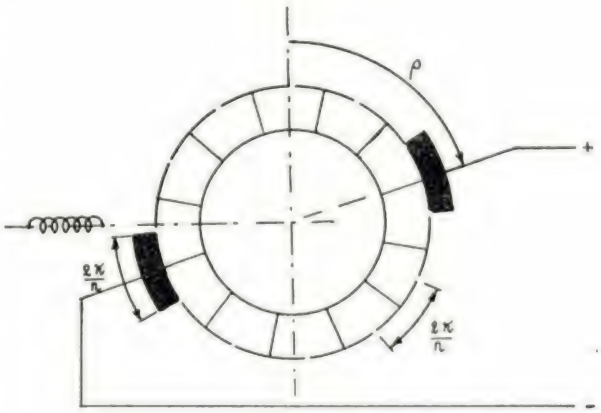


FIG. 10

Durant le mode 3, on assiste à un nouvel élargissement des balais dont l'origine reste fixée en $\pi/2-2\pi/n$ (fig. 11). A la fin du mode 3, les balais ont une largeur de $4\pi/n$ et une position égale à $\pi/2$. C'est le court-circuit permanent de la machine. Deux constatations peuvent donc être faites lorsque le nombre de phase augmente.

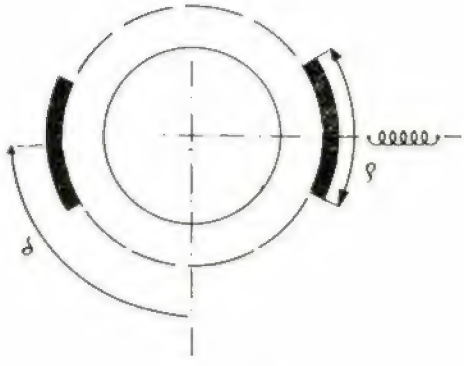


FIG. 11

— En premier lieu, cette augmentation n'entraine pas pour la structure considérée, l'apparition de modes supérieurs au mode 3 et cela contrairement au cas du redressement sur sources inductives non couplées **[5]**. Pour ce dernier, on distingue n/2 modes successifs, le nombre de phases en commutation à chaque borne de sortie croissant d'une unité quand on passe d'un mode au suivant et atteignant n/2 au court-circuit.

— En second lieu, l'augmentation du nombre n de phases va de pair avec un élargissement de la zone correspondant au mode 2. La disparition progressive des modes 1 et 3 s'accompagne d'une diminution de l'angle d'empiètement qui reste constant et égal à $4\pi/n$ sur pratiquement toute la caractéristique. Ceci entraine un écart croissant entre le courant de crête et le courant moyen véhiculé par les diodes. A la limite, pour n tendant vers l'infini, le segment d'ellipse constitue la caractéristique tout entière, tandis que l'angle de conduction des diodes devient infinitésimal.

La figure 12 montre clairement que si le nombre de phases est suffisant, on peut remplacer avec une bonne approximation la caractéristique réelle par la caractéristique obtenue en prolongeant l'ellipse du mode 2 jusqu'à ses intersections avec les axes. Ceci revient à considérer que les équations (16) et (17) décrivent le comportement de la machine depuis la marche à vide jusqu'au court-circuit. Au niveau de la machine à courant continu équivalente ceci revient à considérer qu'elle possède depuis la marche à vide jusqu'au court-circuit des balais de largeur $2\pi/n$ et que leur position passe progressivement de l'axe neutre à l'axe direct d'inducteur. Par pasage à la limite pour n tendant vers l'infini, on retrouve ainsi, en régime, le modèle de la génératrice à couplages sinusoïdaux établi à partir des équations des circuits à commutation **[6]**.

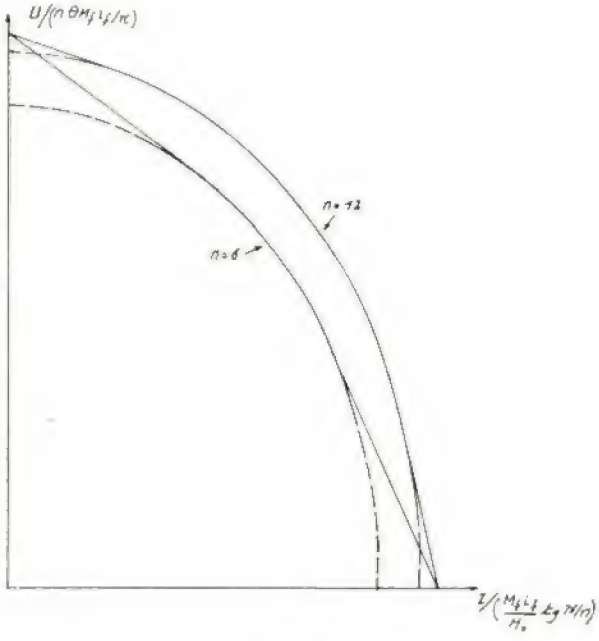
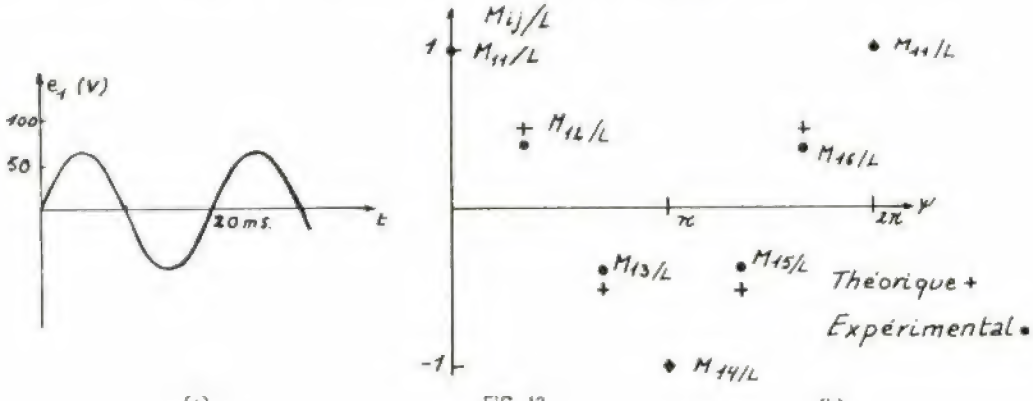


FIG. 12

4 VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES

Des essais ont été effectués sur une machine hexaphasée à pôles lisses et à rotor feuilleté. La f. e. m. induite dans chaque phase par l'inducteur est pratiquement sinusoïdale (fig. 13 a) tandis que les mutuelles entre les différentes phases de l'induit, s'écartent jusqu'à 20 % des valeurs correspondant à un couplage sinusoïdal parfait (fig. 13 b).



(a) FIG. 13 (b)

La figure 14 permet de comparer la caractéristique externe expérimentale à la caractéristique externe théorique. L'écart qui apparaît entre les deux courbes aux environs du court-circuit, provient du défaut de couplage entre les phases de l'induit. Cette imperfection de couplage entrainant une action plus faible des phases en commutation sur les autres phases, il s'en suit que les zones correspondant aux modes 2 et 3 sont partiellement réduites. La fin du mode 3 ne coïncide plus avec le court-circuit de la machine **[4]**. Un quatrième mode de commutation apparait qui correspond au dernier tronçon (de pente plus faible) de la caractéristique expérimentale.

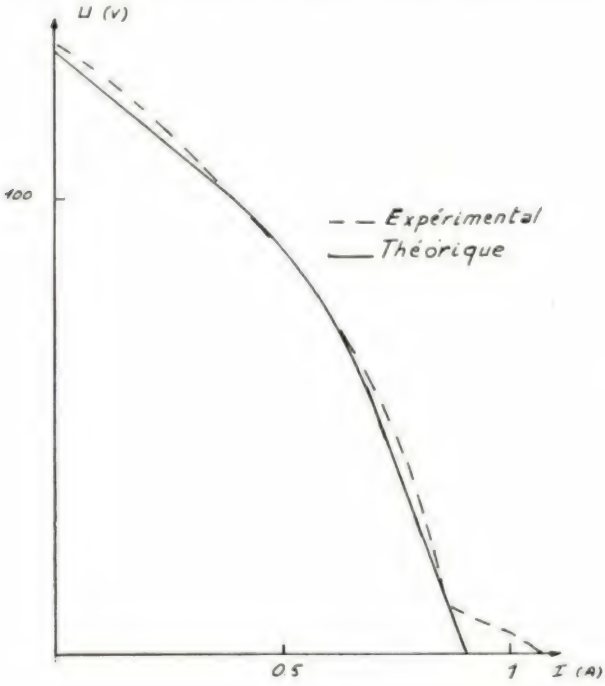


FIG. 14

Les figures 15 et 16 permettent de comparer les formes d'ondes théoriques et expérimentales pour un point de fonctionnement qui correspond théoriquement au milieu du mode 2 (β égal 15°). On remarque une bonne concordance entre les diférentes courbes malgré quelques écarts dus aux défauts de couplage et au lissage imparfait du courant.

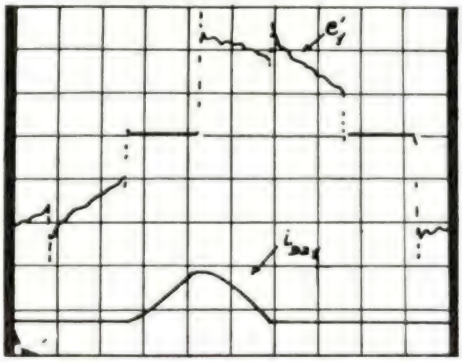


FIG. 15

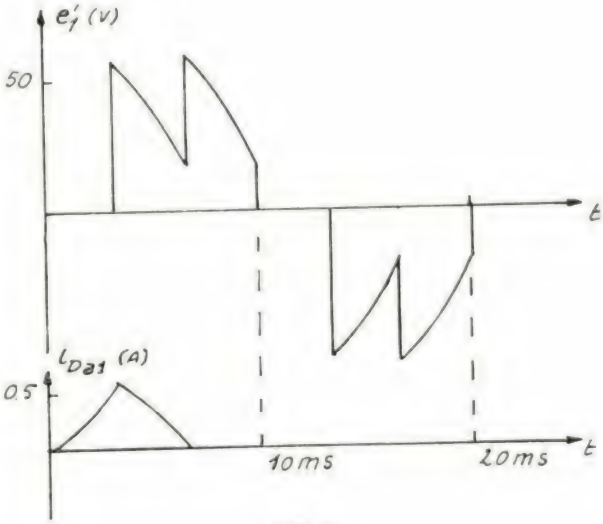


FIG. 16

5. RÉFÉRENCES

[1] **P. W. Franklin:** *Theory of the three phase salient pole type generator with bridge rectified output.* IEEE Winter Meeting, New York, Janvier 1972.

[2] **T. W. Stuart & M. W. Tripp:** *Steady state analysis of the rectified superconducting alternator.* IEEE, AES, Vol. 13 n.º 4.

[3] **J. Debernardi & R. Gillet:** *Système d'excitation compact pour alternateur nucléaire à 4 pôles.* AIM Liège Centrales 1974, pp. 75; 1-9.

[4] **F. Labrique:** *Analyse de la commutation dans les ponts redresseurs alimentés par des sources polyphasées couplées.* Université Catholique de Louvain, séminaire d'électronique de puissance, mars 1976 (note interne).

[5] **G. Seguier:** *Les montages redresseurs.* Dunod, 1970.

[6] **M. S. Garrido:** *Etude théorique et expérimentale de la génératrice à redresseur. I. Equations de la génératrice à redresseur. Etude du régime permanent.* Revue E, Vol. VII, n.º 3.

PARA:

ECONOMIZAR ENERGIA
COMBATER A POLUIÇÃO
POUPAR TEMPO
DEVOLVER AO PEÃO OS ESPAÇOS DE QUE CARECE

METROPOLITANO

UMA SOLUÇÃO EFICAZ
NO DOMINIO DOS TRANSPORTES
COLECTIVOS URBANOS

METROPOLITANO DE LISBOA

Etude de la commutation dans une génératrice polyphasée à redresseur

Deuxième partie

Etude de la génératrice à couplages triangulaires

F. LABRIQUE
Premier Assistant
Université Catholique de Louvain

RESUMO

Este artigo é a segunda parte dum estudo sobre a comutação dum gerador polifásico sem colector. A partir de dois casos limite, o triangular aqui apresentado e o sinusoidal já apresentado na primeira parte, mostra-se que a lei de variação das inductâncias mútuas das espiras em função da posição pode afectar consideravelmente o processo de comutação e, por conseguinte, a caracteristica externa do gerador.

A análise teórica é confirmada por resultados experimentais obtidos com máquinas de laboratório.

ABSTRACT

This paper is the second part of a study on the commutation processes in a polyphase commutatorless DC generator. From the study of two limit cases, the triangular one presented here and the sinusoïdal one, yet presented in the first part, it is shown that the form of the variation of the mutual inductances as a function of the relative positions of the different coils can affect considerably the commutation processes and hence the generator output characteristic.

Experimental results on laboratory test machines confirm the theoretical analysis.

INTRODUCTION

Dans la première partie de cet article on a étudié le fonctionnement d'une génératrice polyphasée à redresseur présentant un couplage sinusoïdal entre l'inducteur et les phases de l'induit et un couplage sinusoïdal **parfait** entre les phases de l'induit [1]. La seconde partie est consacrée à l'analyse du comportement d'une génératrice présentant un couplage triangulaire entre l'inducteur et les phases de l'induit, et un couplage triangulaire **parfait** entre les phases de l'induit.

Rappelons que, par couplage parfait, on entend un couplage dont la loi est telle que la mutuelle entre deux phases occupant la même position géométrique est égale, en valeur absolue, à la self propre de chacune de ces phases.

On considère le cas d'une machine à pôles lisses, sans amortisseurs, à induit polygonal et nombre pair de phases. Le nombre n de phases doit être supérieur ou égal à 6 pour que la présente étude s'applique sans aucune restriction.

Comme pour la machine à couplages sinusoïdaux, l'étude effectuée dans le cas du régime permanent, conduit à une solution analytique du comportement depuis la marche à vide jusqu'au court-circuit, moyennant les hypothèses et approximations suivantes:

— l'inducteur est alimenté par une source de courant
— le courant de sortie du pont redresseur est parfaitement «lissé»
— la résistance interne des phases de l'induit est négligeable
— les chutes directes et courants inverses des diodes sont négligeables.

1. EQUATIONS DE DÉPART POUR LA MACHINE À COUPLAGES TRIANGULAIRES

Avec les notations de la figure 1 et une source de courant dans l'inducteur, les forces électromotrices engendrées par l'inducteur, dans les phases de l'induit, s'écrivent, en prenant comme origine le passage de la première phase par l'axe neutre relatif à l'inducteur

$$e_K = \dot{\theta}\, M_f i_f \,\mathrm{rect}\left[\theta - 2\,(K-1)\,\pi/n\right] \qquad 1 \leqslant K \leqslant n \qquad (1)$$

Dans cette équation M_f représente la valeur maximum de la dérivée de la mutuelle entre l'inducteur et une phase de l'induit, θ la position de l'induit, $\dot{\theta}$ sa vitesse

Travail fait en collaboration avec Centro de Automática da Universidade de Lisboa (I. N. I. C.)
Manuscrito recebido para publicação em 10/7/78.

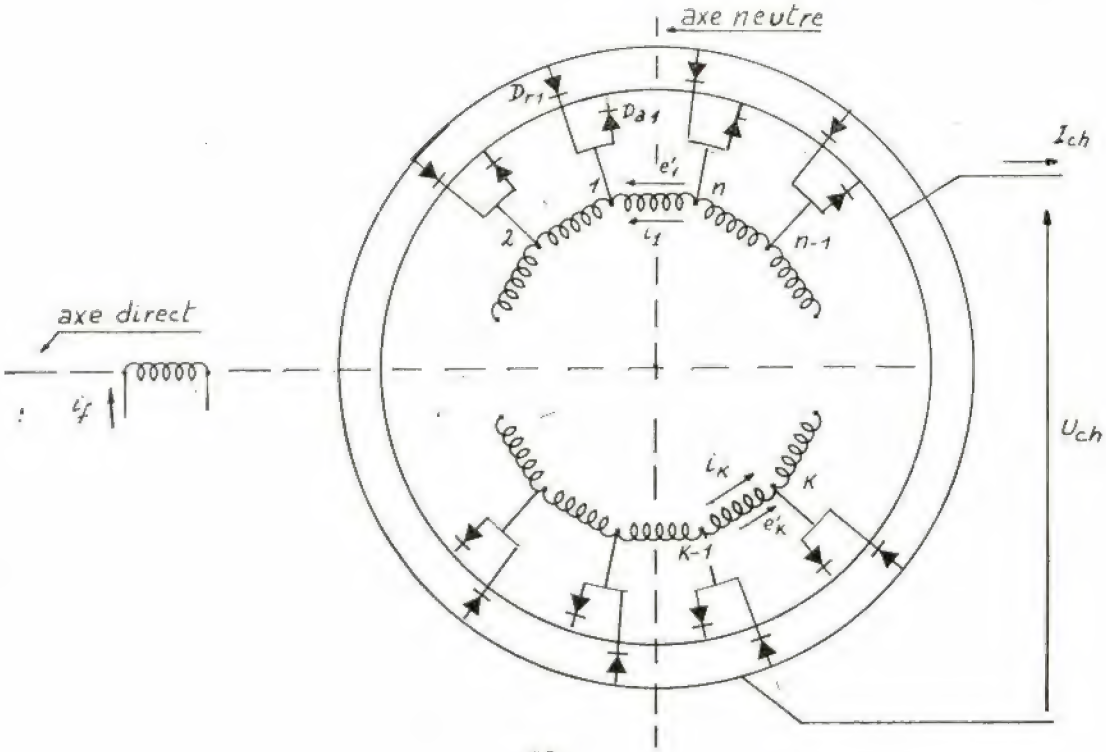


FIG. 1

et la fonction rect $[\theta - 2(K-1)\pi/n]$ une fonction rectangulaire antisymétrique, de période 2π, d'amplitude unitaire et décalée de $2(K-1)\pi/n$ par rapport à l'origine (fig. 2).

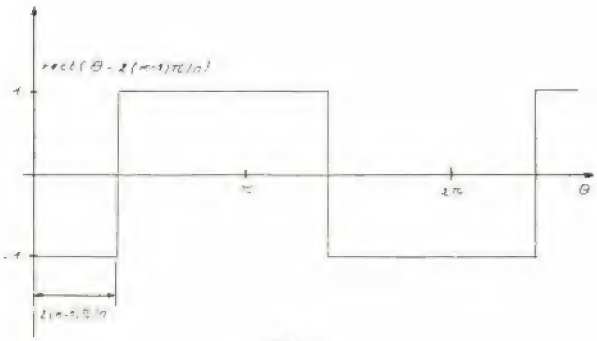


FIG. 2

Les mutuelles entre les phases de l'induit sont de la forme:

$$M_{ij} = M_0 \, \mathrm{tri}\,[2(i-j)\pi/n] \qquad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n \qquad (2)$$

Dans ces équations M_0 représente la valeur maximum de la mutuelle entre phases et la fonction tri (ψ) une fonction triangulaire, symétrique, d'amplitude unitaire et de période 2π (fig. 3). Les expressions analytiques des fonctions rect $[\theta - 2(K-1)\pi/n]$ et tri (ψ) sont données à l'annexe 1.

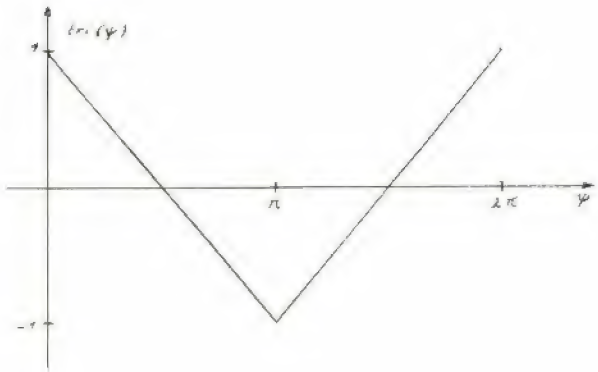


FIG. 3

2. ANALYSE DU FONCTIONNEMENT

2.1. Fonctionnement à faible charge: modes 1 et 2

Le premier mode de fonctionnement rencontré dans la machine à couplages triangulaires correspond à un mécanisme de commutation identique à celui du mode 1 de la machine à couplages sinusoïdaux (cfr le paragraphe 2.1. de la première partie de cet article [1]).

A tout instant, l'induit se partage en deux voies mises en parallèle, chacune parcourue par la moitié du courant de charge, l'une comportant toutes les phases dont les f. e. m. sont positives et l'autre toutes les

phases dont les f. e. m. sont négatives (fig. 4.a). La borne positive de la charge est ainsi reliée au sommet du polygone d'induit dont le potentiel est le plus élevé et la borne négative de sortie au sommet du polygone d'induit dont le potentiel est le plus bas. Tous les $2K\,\pi/n$, par suite de la rotation de l'induit, deux phases diamétralement opposées changent de voie, ce qui entraine un court-circuit temporaire de ces phases, pendant que le courant s'y inverse (fig. 4.b).

Afin d'écrire les équations relatives au fonctionnement de la génératrice à couplages triangulaires durant le mode 1, considérons l'intervalle qui débute par l'entrée en commutation des phases 1 et $(n/2+1)$ (fig. 5). Durant l'empiètement, on a le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \dot{\theta}\, M_f i_f = \dot{\theta}\, M_o \dfrac{di_1}{d\theta} - \dot{\theta}\, M_o \dfrac{di_{(n/2+1)}}{d\theta} \\ -\dot{\theta}\, M_f i_f = -\dot{\theta}\, M_o \dfrac{di_1}{d\theta} + \dot{\theta}\, M_o \dfrac{di_{(n/2+1)}}{d\theta} \end{cases} \tag{3}$$

Après intégration, compte tenu des valeurs initiales et finales du courant dans les phases considérées, on obtient l'équation de liaison entre l'angle d'empiètement γ et le courant I_{ch}:

$$I_{ch} = \frac{M_f i_f}{2\,M_o}\,\gamma \tag{4}$$

Durant l'empiètement, les forces électromotrices totales aux bornes des phases non commutantes valent, en tenant compte de (1) et (3)

$$e'_K = \dot{\theta}\, M_f i_f \,\mathrm{rect}\,[\theta - 2\,(K-1)\,\pi/n] - \\ - \dot{\theta}\, M_f i_f \,\mathrm{tri}\,[2\,(K-1)\,\pi/n] \tag{5}$$

Les deuxièmes termes de ces équations correspondent aux tensions induites par la variation de courant dans les phases en empiètement. Comme ces tensions sont, en valeur absolue, strictement inférieures à $\dot{\theta}\, M_f i_f$, elles ne peuvent pas déplacer les instants de passage par zéro des forces électromotrices totales dans ces phases par rapport aux instants de passage par zéro des forces électromotrices, induites par l'inducteur, correspondantes. En conséquence, si, comme pour la machine à couplages sinusoïdaux, l'empiètement de deux phases diamétralement opposées n'entraine l'entrée en commutation d'aucune autre phase, cet empiètement ne peut toutefois pas déplacer les positions d'entrée en commutation des autres phases. Celles-ci restent fixées au passage de ces phases par l'axe neutre relatif à l'inducteur.

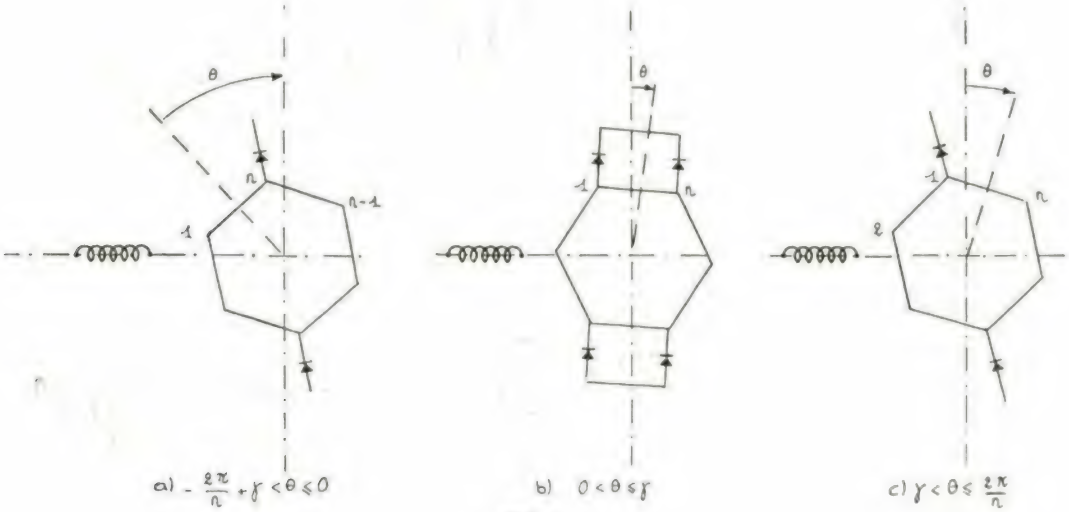


FIG. 4

La tension de sortie, qui présente, comme dans le cas sinusoïdal, une ondulation résiduelle de période $2\,\pi/n$, a une valeur moyenne égale à:

$$\bar{U}_{ch} = \frac{n\,\dot{\theta}\, M_f i_f}{2}\,(1-\gamma/\pi) \tag{6}$$

L'élimination de γ entre (4) et (6) fournit l'équation de la caractéritique externe durant le mode 1:

$$\bar{U}_{ch} = \frac{n\,\dot{\theta}\, M_f i_f}{2} - \frac{n\,\dot{\theta}\, M_o I_{ch}}{\pi} \tag{7}$$

C'est un segment de droite qui joint le point:

$$\left(\bar{U}_{ch} = \frac{n\,\dot{\theta}\, M_f i_f}{2}\,;\ I_{ch} = 0\right)$$

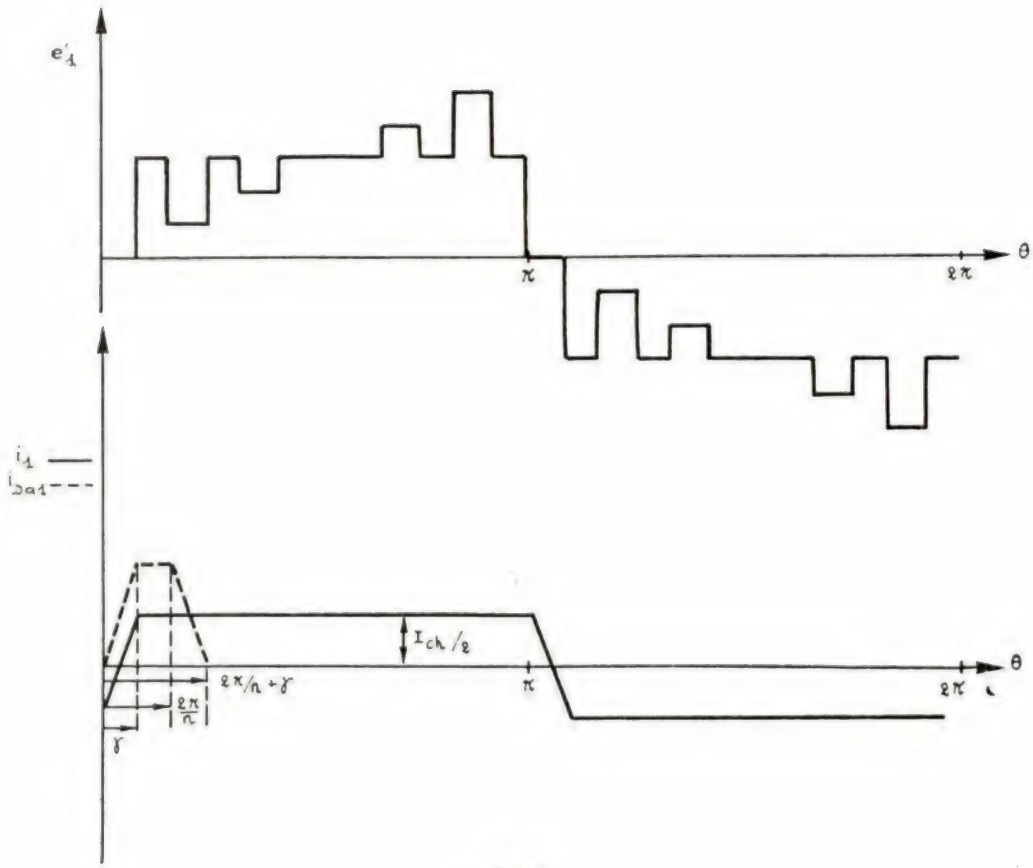


FIG. 5

au point (fig. 6):

$$\left[\bar{U}_{ch} = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \dot{\theta}\, M_f i_f \,;\; I_{ch} = \frac{M_f i_f}{M_o} \frac{\pi}{n}\right]$$

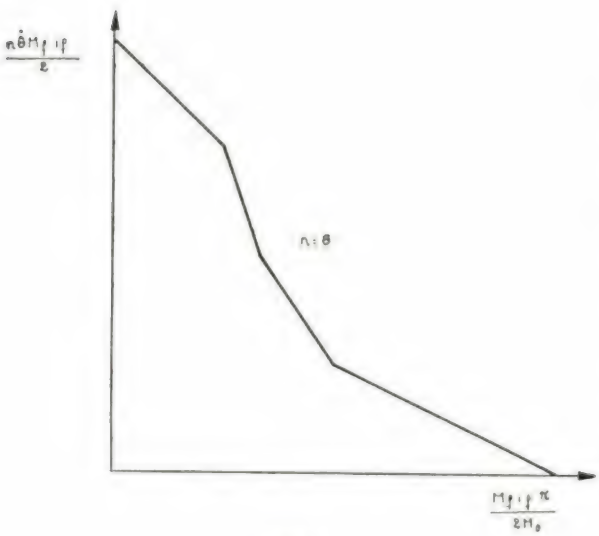


FIG. 6

Durant ce premier mode, il y a successivement deux puis une diode en conduction à chaque borne de sortie. Chaque diode est passante pendant $\frac{2\pi}{n} + \gamma$ et conduit un courant moyen qui vaut I_{ch}/n avec un courant de crête égal à I_{ch} (fig. 5).

Lorsque le courant de charge dépasse la valeur obtenue en remplaçant γ par $2\pi/n$ dans l'équation (4), un deuxième mode de commutation apparaît, pendant lequel l'angle d'empiètement croît de $2\pi/n$ à $4\pi/n$. Durant ce mode, la fin de l'empiètement d'une phase chevauche le début de l'empiètement de la phase suivante. Ceci résulte du fait que l'empiètement d'une phase à chaque borne de sortie (comme signalé plus haut) ou de deux phases à chaque borne de sortie (comme on le verra plus loin) ne peut déplacer les instants d'entrée en commutation des autres phases. Ceux-ci restent fixés au passage de ces phases par l'axe neutre relatif à inducteur.

Pour écrire les équations relatives au mode 2, considérons, à nouveau, l'instant d'entrée en commutation des phases 1 et (n/2+1). L'empiètement de ces phases se divise en trois intervalles (figs 7 et 8):

— de 0 à $\gamma - 2\pi/n$

Il y a commutation simultanée des phases 1 et n à la borne positive de sortie et des phases n/2 et (n/2+1)

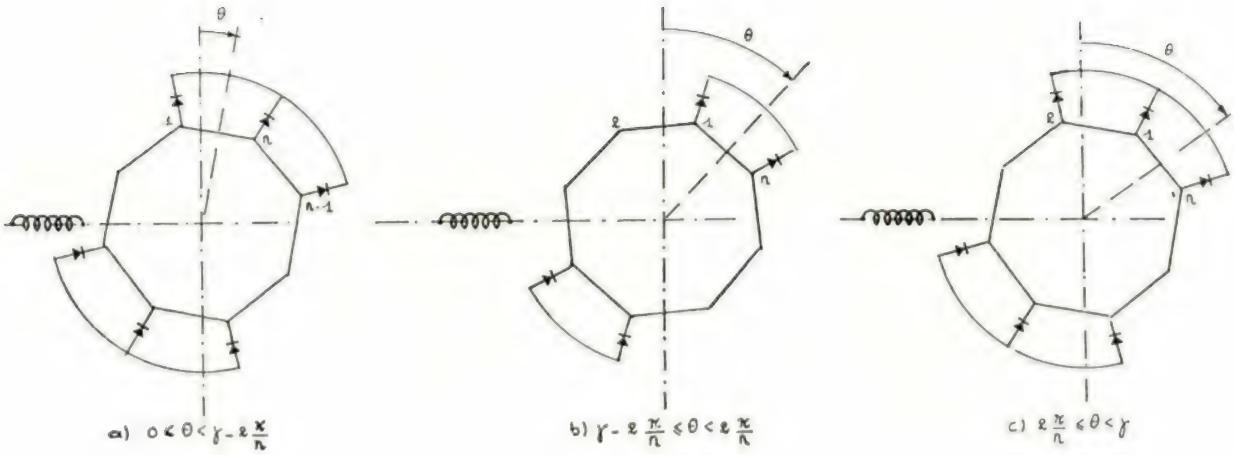


FIG. 7

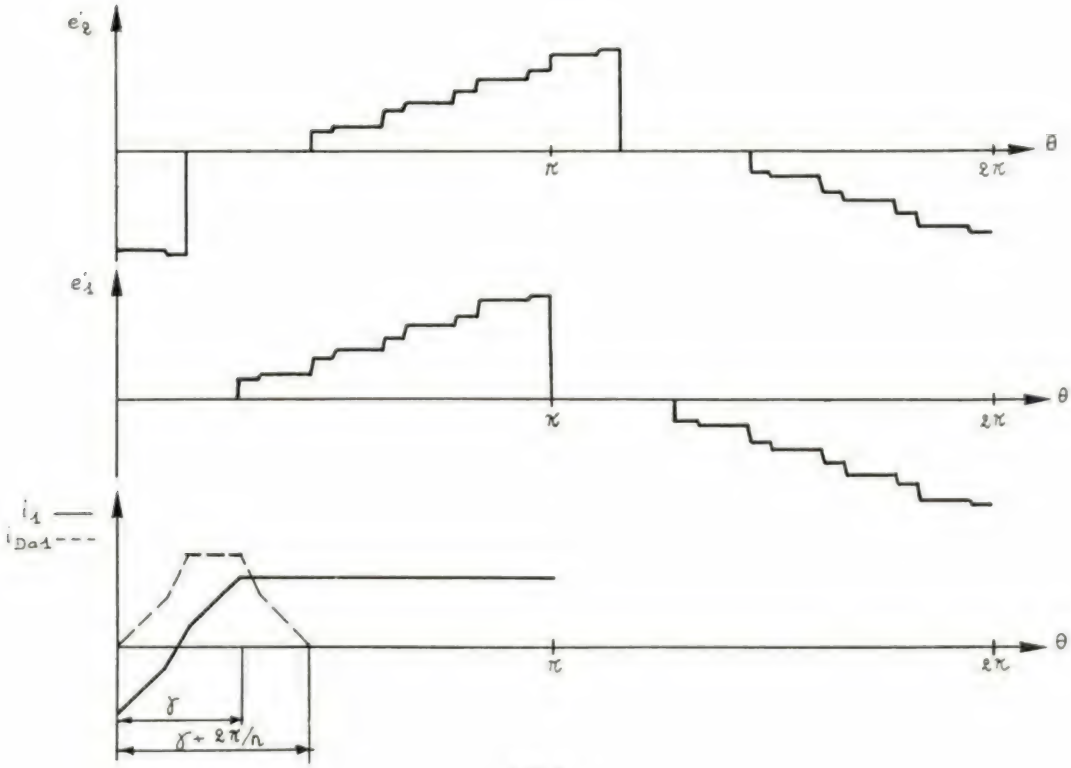


FIG. 8

à la borne négative. En tenant compte de la symétrie existant entre les courants dans les phases diamétralement opposées, on obtient:

$$\dot{\theta}\, M_f i_f = 2\,\dot{\theta}\, M_o \frac{di_1}{d\theta} + 2\,\dot{\theta}\, M_o (1-4/n) \frac{di_n}{d\theta} \qquad (8)$$

$$\dot{\theta}\, M_f i_f = 2\,\dot{\theta}\, M_o (1-4/n) \frac{di_1}{d\theta} + 2\, M_o \frac{di_n}{d\theta}$$

Pendant cet intervalle, les forces électromotrices dans les phases non commutantes valent:

$$e'_K = \dot{\theta}\, M_f i_f \,\mathrm{rect}\,[\theta - 2\,(K-1)\,\pi/n] - \qquad (9)$$

$$-2\,\dot{\theta}\, M_o \,\mathrm{tri}\,[2\,(K-1)\,\pi/n] \frac{di_1}{d\theta} - 2\,\dot{\theta}\, M_o \,\mathrm{tri}\,[2\,K\,\pi/n] \frac{di_n}{d\theta}$$

En tenant compte de (8), l'équation (9) peut encore s'écrire:

$$e'_K = \dot{\theta}\, M_f i_f \,\mathrm{rect}\,[\theta - 2\,(K-1)\,\pi/n] -$$

$$-\dot{\theta}\, M_f i_f \frac{\mathrm{tri}\,[2\,(K-1)\,\pi/n] + \mathrm{tri}\,(2\,K\,\pi/n)}{1 + \mathrm{tri}\,(2\,\pi/n)} \qquad (10)$$

Cette équation appelle les mêmes commentaires que l'équation (5). Il n'y a pas de déplacement des instants de passage par zéro des forces électromotrices totales par rapport aux instants de passage par zéro des forces électromotrices correspondantes induites par l'inducteur.

— de $\gamma - 2\,\pi/n$ à $2\,\pi/n$

Seules les phases 1 et $(n/2+1)$ empiètent. Les équations (3) et (5) sont applicables durant cet intervalle.

— de $2\,\pi/n$ à γ

Il y a commutation simultanée des phases 1 et 2 à la borne positive et des phases $(n/2+1)$ et $(n/2+2)$ à la borne négative. On peut écrire:

$$\dot{\theta}\, M_f i_f = 2\,\dot{\theta}\, M_o \frac{di_2}{d\theta} + 2\,\dot{\theta}\, M_o\,(1-4/n)\frac{di_1}{d\theta} \qquad (11)$$

$$\dot{\theta}\, M_f i_f = 2\,\dot{\theta}\, M_o\,(1-4/n)\frac{di_2}{d\theta} + 2\,\dot{\theta}\, M_o \frac{di_1}{d\theta}$$

Les tensions aux bornes des phases non commutantes valent:

$$e'_K = \dot{\theta}\, M_f i_f \,\mathrm{rect}\,[\theta - 2\,(K-1)\,\pi/n] -$$

$$-\dot{\theta}\, M_f i_f \frac{\mathrm{tri}\,[2\,(K-2)\,\pi/n] + \mathrm{tri}\,[2\,(K-1)\,\pi/n]}{1 + \mathrm{tri}\,(2\,\pi/n)} \qquad (12)$$

Il convient de remarquer que les équations (11) et (12) peuvent se déduire des équations (8) et (10) en y incrémentant d'une unité, modulo n, tous les indices des phases en commutation.

Pour déterminer l'évolution du courant dans la phase 1 durant son empiètement et déterminer l'équation liant γ à I_{ch}, on résoud les équations (8), (5) et (11) par rapport à $\frac{di_1}{d\theta}$, puis on les intègre sur leurs intervalles de validité respectifs. Compte tenu de la valeur de i_1 en début et en fin d'empiètement, on obtient facilement:

$$I_{ch} = \frac{M_f i_f}{2\,M_o}\left[\frac{\gamma - 2\,\pi/n}{1-2/n} + (4\,\pi/n - \gamma)\right] \qquad (13)$$

La tension moyenne de sortie vaut, durant le mode 2:

$$\overline{U}_{ch} = \left(\frac{n}{2} - 1\right)\dot{\theta}\, M_f i_f - \dot{\theta}\, M_f i_f \left(\frac{\gamma - 2\,\pi/n}{2\,\pi/n}\right) \qquad (14)$$

L'élimination de γ fournit l'équation du segment de droite que constitue la caractéristique externe durant ce mode, soit:

$$U_{ch} = (n-2)\,\dot{\theta}\, M_f i_f - \frac{(n-2)\,\dot{\theta}\, M_o I_{ch}}{2\,\pi/n} \qquad (15)$$

Durant le mode 2, chaque diode est passante pendant $2\,\pi/n + \gamma$. Il y a successivement 2 puis 3 diodes en conduction à chaque borne de sortie. Le courant moyen dans chaque diode vaut I_{ch}/n, tandis que le courant de crête, I_M, y atteint seulement:

$$I_M = I_{ch} - \frac{M_f i_f}{2\,M_o}\,\frac{\gamma - 2\,\pi/n}{2\,(1-2/n)} \qquad (16)$$

A la fin du mode 2, l'angle de conduction des diodes atteint $6\,\pi/n$ et le courant de crête qui les traverse vaut $I_{ch}/2$.

2.2. Fonctionnement jusqu'au court circuit: modes 3 à n/2

Au delà du mode 2, apparaissent une série de modes, correspondant chacun à un élargissement de $2\,\pi/n$ de l'angle d'empiètement γ, et à l'augmentation d'une unité du nombre de phases en commutation à chaque borne de sortie. Ainsi durant le mode K $(3 \leqslant K \leqslant n/2)$, il y a succcessivement K puis $(K-1)$ phases en commutation à chaque borne de sortie, chaque phase entrant en commutation lors de son passage par l'axe neutre (cfr. annexe 2). Toutefois, l'élargissement de l'angle d'empiètement n'entraine pas, pour la machine considérée, un élargissement correspondant de l'angle de conduction des diodes, celui-ci ne dépassant en aucun cas $8\,\pi/n$ par période. Afin de mettre en évidence ce phénomène, peu prévisible à première vue, nous allons considérer un mode K quelconque. Il convient, pour ce mode, de distinguer pour l'empiètement d'une phase $(2\,K-1)$ intervalles successifs. Ils sont constitués d'une alternance d'intervalles où il y a K phases en empiètement et d'intervalles où il y a $(K-1)$ phases en empiètement (fig. 9).

Si l'on considère l'empiètement de la phase 1, on peut écrire, pour les deux premiers intervalles (fig. 10).

— de 0 à $\gamma - 2\,(K-1)\,\pi/n$

Il y a K phases en commutation à chaque borne de sortie, les courants dans les phases en commutation à la borne positive sont régis par le système suivant d'équations:

$$\begin{bmatrix} M_f i_f \\ M_f i_f \\ \cdots\cdots \\ M_f i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2M_o & 2M_o \operatorname{tri}(2\pi/n) & \cdots\cdots & 2M_o \operatorname{tri}[2(K-1)\pi/n] \\ 2M_o \operatorname{tri}(2\pi/n) & 2M_o & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2M_o \operatorname{tri}[2(K-1)\pi/n] & 2M_o \operatorname{tri}[2(K-2)\pi/n] & \cdots\cdots & 2M_o \end{bmatrix} \times \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_n \\ \cdots \\ i_{(n-K+2)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

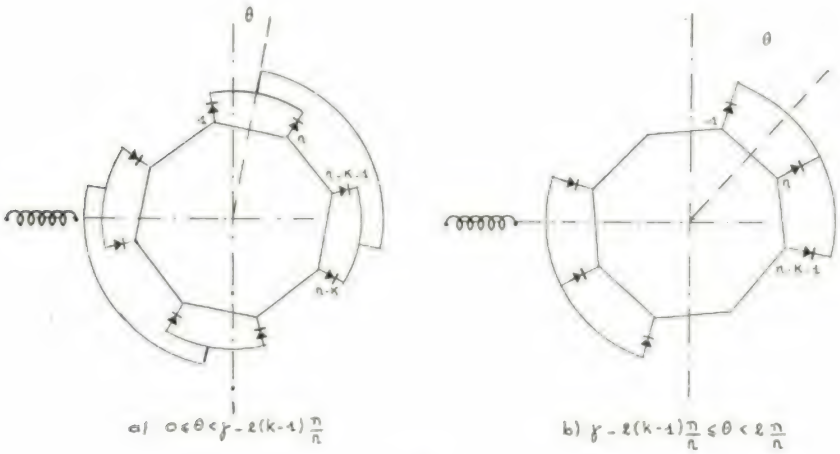


FIG 9

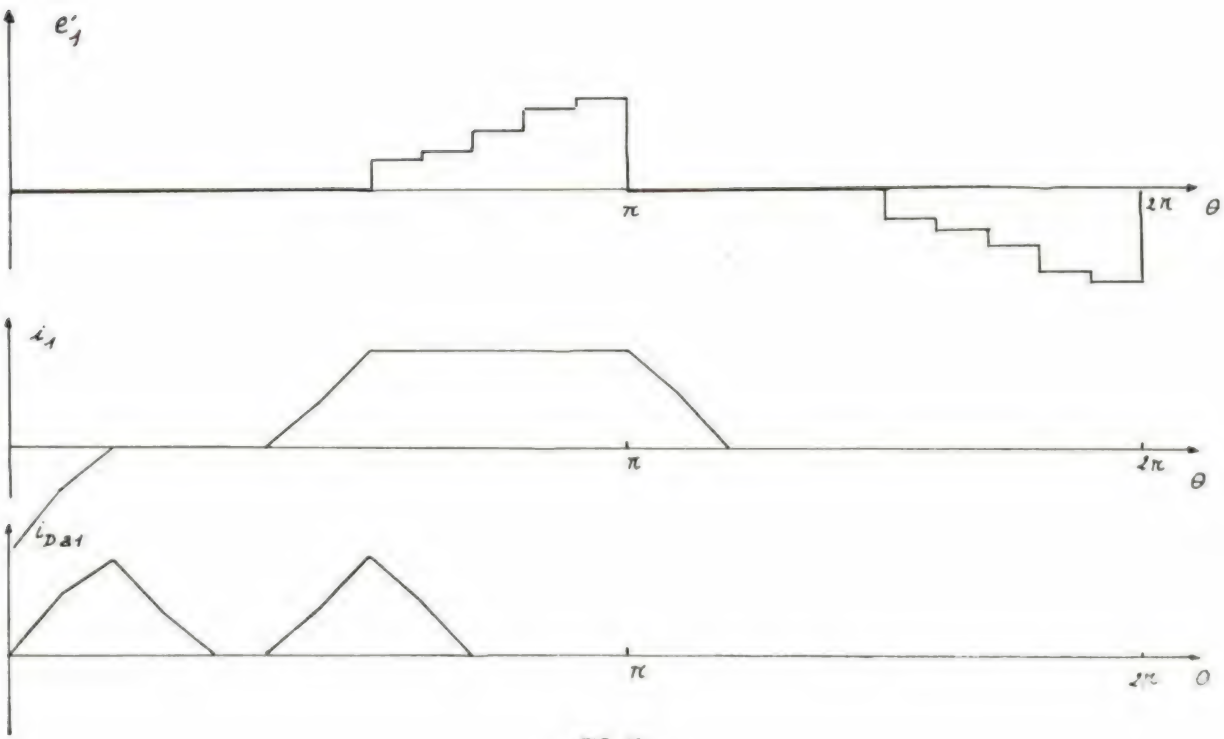


FIG. 10

Les forces électromotrices totales aux bornes des phases non commutantes valent, durant cet intervalle (cfr. annexe 2):

$$e'_j = \dot{\theta} M_f i_f \operatorname{rect}[\theta - 2(j-1)\pi/n] - \dot{\theta} M_f i_f \frac{\operatorname{tri}[2(j-1)\pi/n] + \operatorname{tri}[2(j+K-2)\pi/n]}{1 + \operatorname{tri}[2(K-1)\pi/n]} \quad (18)$$

— de $\gamma-2(K-1)\pi/n$ à $2\pi/n$

Il y a $(K-1)$ phases en commutation à chaque borne de sortie. Les courants dans les phases en commutation à la borne positive sont régis par le système suivant:

$$\begin{bmatrix} M_f i_f \\ M_f i_f \\ \cdots\cdots \\ M_f i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2M_o & 2M_o \operatorname{tri}(2\pi/n) & \cdots\cdots & 2M_o \operatorname{tri}[2(K-2)\pi/n] \\ 2M_o \operatorname{tri}(2\pi/n) & 2M_o & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 2M_o \operatorname{tri}[2(K-2)\pi/n] & 2M_o \operatorname{tri}[2(K-3)\pi/n] & \cdots\cdots & 2M_o \end{bmatrix} \times \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_n \\ \cdots \\ i_{(n-K+3)} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Les forces électromotrices totales aux bornes des phases non commutantes valent durant cet intervalle (cfr.annexe 2):

$$e'_j = \dot{\theta} M_f i_f \operatorname{rect}[\theta - 2(j-1)\pi/n] -$$

$$-\dot{\theta} M_f i_f \frac{\operatorname{tri}[2(j-1)\pi/n] + \operatorname{tri}[2(j+K-3)\pi/n]}{1+\operatorname{tri}[2(K-2)\pi/n]} \quad (20)$$

Pour les $(2K-3)$ intervalles restants, les équations obtenues sont analogues et peuvent se déduire des équations (17) à (20) moyennant une adaptation des indices des phases en commutation. Ces indices doivent être augmentés, tous les $2\pi/n$, d'une unité modulo n.

L'évolution du courant i_1 dans la phase 1 durant son empiètement s'obtient en inversant les équations du type (17) et (19) et en intégrant chaque $\frac{di_1}{d\theta}$ obtenu sur l'intervalle qui lui correspond. L'inversion des équations (17) ou (19) conduit à (cfr. annexe 2)

— pour l'équation (17):

$$\frac{di_1}{d\theta} = \frac{di_{(n-K+2)}}{d\theta} = \frac{M_f i_f}{2M_o[1+\operatorname{tri}[2(K-1)\pi/n]]}$$

$$\frac{di_n}{d\theta} = \frac{di_{(n-1)}}{d\theta} = \ldots = \frac{di_{(n-K+3)}}{d\theta} = 0 \quad (21)$$

— pour l'équation (19):

$$\frac{di_1}{d\theta} = \frac{di_{(n-K+3)}}{id\theta} = \frac{M_f i_f}{2M_o[1+\operatorname{tri}[2(K-2)\pi/n]]}$$

$$\frac{di_n}{d\theta} = \frac{di_{(n-1)}}{d\theta} = \ldots = \frac{di_{(n-K+4)}}{d\theta} = 0 \quad (22)$$

Les équations (21) et (22) et les équations analogues, qu'on obtient pour les intervalles suivants, montrent que l'inversion du courant dans la phase 1 se fait en trois étapes. La première, de 0 à $2\pi/n$, fait passer le courant dans la phase est nul. La troisième de $\gamma-2\pi/n$ à γ est symétrique de la première et fait passer le courant de 0 à $I_{ch}/2$ (fig. 10). On voit ainsi clairement que les modes 3 à n/2 correspondent tous à un même mécanisme de commutation.

courant dans la phase de $-I_{ch}/2$ à 0. La seconde, de $2\pi/n$ à $\gamma-2\pi/n$, correspond à un intervalle où le

Le courant dans les deux diodes raccordées à un même sommet du polygone d'induit se calcule, comme pour la machine à couplages sinusoïdaux, en faisant la différence des courants dans les deux phases qui y aboutissent.

Sauf pour le mode 3, que nous examinerons ensuite, le courant dans les diodes a la forme représentée à la figure 10. Chaque diode conduit pendat deux intervalles dinstincts, de $4\pi/n$ chacun, l'un situé de 0 à $4\pi/n$, et l'autre de $\gamma-2\pi/n$ à $\gamma+2\pi/n$. Le courant moyen d'une diode vaut toujours I_{ch}/n tandis que son courant de crête atteint seulement $I_{ch}/2$.

Durant le mode 3, l'angle de conduction des diodes passe progressivement de $6\pi/n$ à $8\pi/n$, chaque diode conduit un courant moyen I_{ch}/n avec un courant de crête qui vaut $I_{ch}/2$ (fig. 11). A la fin du mode 3, le courant

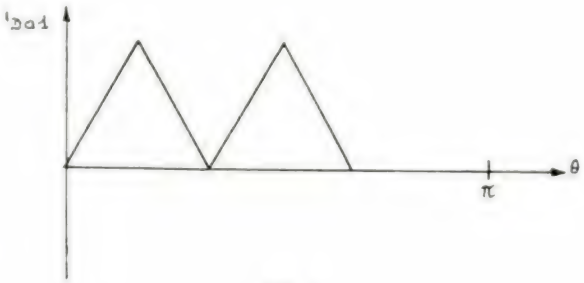


FIG. 11

des diodes passe par zéro au milieu de l'intervalle de conduction. C'est le début de la scission de l'intervalle de conduction en deux intervalles distincts caractéristiques des modes supérieurs au mode 3.

Durant les modes 3 à n/2, la caractéristique externe se compose d'une série de segments de droite de pentes décroissantes. Le segment de droite qui correspond au mode K joint les points suivants:

$$\bar{U}_{ch} = (n/2-K+1)\dot{\theta} M_f i_f ; \quad I_{ch} = \frac{M_f i_f 4\pi/n}{2M_o[1+\operatorname{tri}[2(K-2)\pi/n]]}$$

$$\bar{U}_{ch} = (n/2-K)\dot{\theta} M_f i_f ; \quad I_{ch} = \frac{M_f i_f 4\pi/n}{2M_o[1+\operatorname{tri}[2(K-1)\pi/n]]}$$

3. INTERPRÉTATION DU FONCTIONNEMENT AU MOYEN D'UNE MACHINE À COURANT CONTINU ÉQUIVALENTE À LA GÉNÉRATRICE

Le comportement de la génératrice n-phasée à couplages triangulaires peut s'interpréter en termes d'une machine à courant continu ayant n lames de collecteur, de largeur $2\pi/n$ et deux paires de balais dont la largeur et la position sont fonction du courant de charge débité. Comme pour la machine à couplages sinusoïdaux, la position des balais (définie comme celle de leur point milieu) et leur largeur se déduisent de la position et de la largeur des intervalles de conduction des diodes.

Durant le mode 1, on assiste au développement d'une paire de balais dont l'origine reste calée à la ligne neutre d'inducteur et dont la largeur croît avec la charge

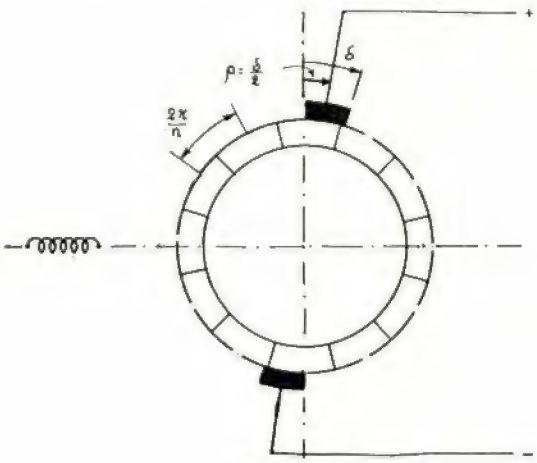


FIG. 12

jusqu'à atteindre $2\pi/n$ à la fin du mode 1 (fig. 12). A ce moment la position de cette paire de balais vaut π/n. A partir du mode 2, cette paire de balais se dédouble: des deux paires de balais ainsi formés, de largeur $2\pi/n$ chacune, l'une reste fixée à la position π/n et l'autre se décale progressivement jusqu'à atteindre une position $\pi - \pi/n$ au court-circuit (fig. 13). Ce fonctionnement correspond à une mise «hors service» d'une portion croissante de l'induit sans que pour autant il y ait un étalement de courant.

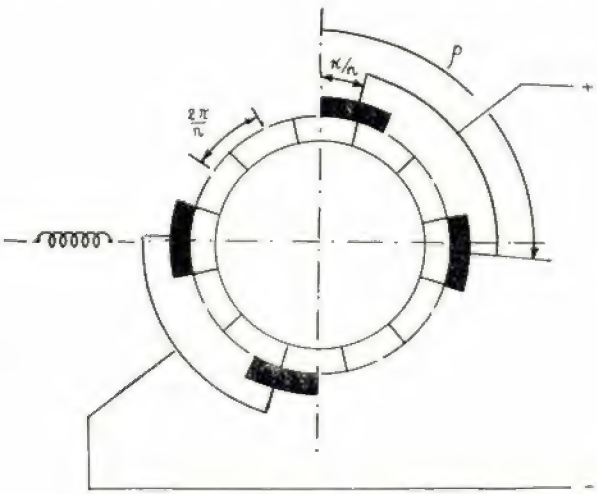


FIG 13

Lorsque le nombre de phases croît, le mode 1 tend à disparaître. A la limite, pour n tendant vers l'infini, seuls subsistent les modes 2 à n/2. Les balais deviennent ponctuels et le mécanisme de commutation se réduit à la rotation de la deuxième paire de balais.

Il est intéressant de remarquer que ce mécanisme coïncide avec le modèle adopté pour introduire la correction spatiale dans l'étude de la génératrice à redresseur **[2]**.

4. VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES

Des essais ont été effectués sur une machine dodécaphasée à pôles lisses et à rotor feuilleté. La f. e. m. induite dans chaque phase par l'inducteur est légèrement trapézoïdale (fig. 14.a). On note toutefois la présence d'harmoniques de denture assez importants. Les mutuelles entre les phases de l'induit sont très proches des valeurs correspondant à un couplage triangulaire parfait (fig. 14.b), (voir page suivante).

La figure 15 permet de comparer la caractéristique

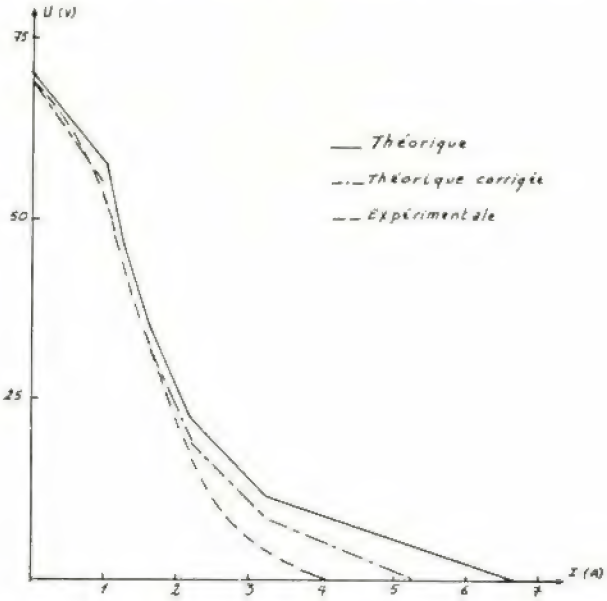


FIG. 15

externe expérimentale avec la caractéristique externe théorique. La chute ohmique dans l'induit et la chute directe sur les diodes n'étant pas négligeables pour la machine utilisée ,on a corrigé la courbe théorique pour tenir compte de ces chutes de tension. L'écart qui subsiste entre la courbe théorique corrigée et la courbe expérimentale provient de la forme légèrement trapézoïdale des f. e. m. induites par l'inducteur. On remarque toutefois la bonne concordance générale entre les résultats théoriques et expérimentaux.

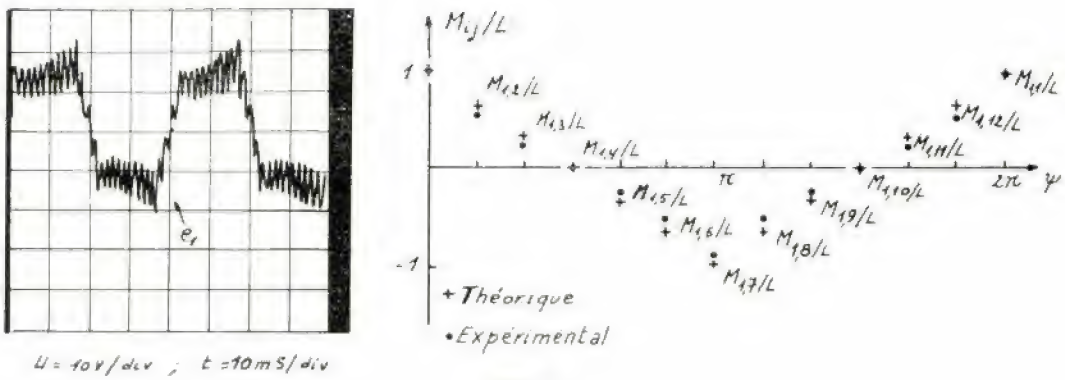


FIG. 14

Les figures 16 et 17 permettent de comparer les formes d'ondes théoriques et expérimentales pour un point de fonctionnement correspondant théoriquement à la fin du mode 4.

On remarque le bon accord entre les résultats théoriques et expérimentaux, notamment en ce qui concerne l'allure des courants de diodes et des courants de phases.

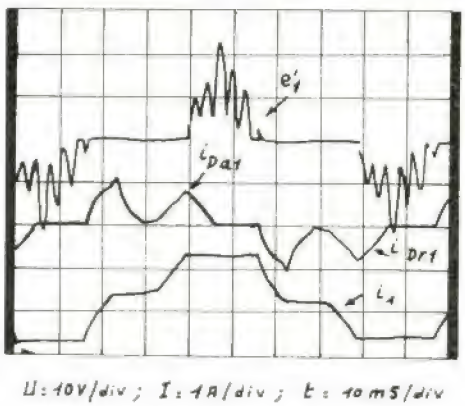


FIG. 16

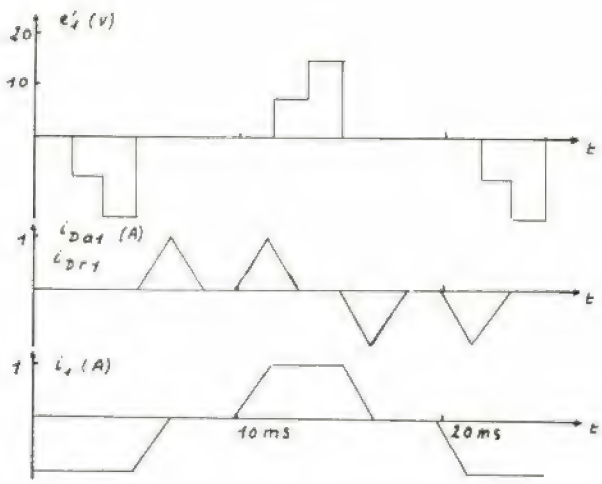


FIG. 17

CONCLUSION

L'étude effectuée a permis de montrer que le comportement des génératrices polyphasées à redresseurs dépend très fortement de la forme des lois de couplages existant entre les différents enroulements de la machine.

Pour chacun des cas extrêmes étudiés, on a pu dégager un mécanisme fondamental de commutation. Dans les deux cas, ce mécanisme jouit des propriétés suivantes:

— il s'applique depuis la marche à vide jusqu'au court-circuit lorsque le nombre de phases tend vers l'infini;

— il correspond à des modes de commutation où les intervalles de conduction des diodes ont une largeur constante, égale à $4\pi/n$, et en fonction de la charge, une position variable par rapport à l'axe neutre de l'inducteur. Pour la machine à couplages sinusoïdaux il y a un intervalle de conduction par diode et par période. Pour la machine à couplages triangulaires, il y en a deux dès la fin du mode 3 et jusqu'à la fin du mode n/2

Pour des machines dont les lois de couplages s'écarteraient sensiblement de l'un ou l'autre des cas considérés, il faudrait envisager des mécanismes de commutation plus complexes où les intervalles de conduction des diodes verraient non seulement leurs positions mais aussi leurs largeurs varier de manière importante avec la charge.

RÉFÉRENCES

[1] **F. Labrique:** *Etude de la commutation dans une génératrice polyphasée à redresseurs. 1. Etude de la génératrice à couplages sinusoïdaux.* Revue Técnica, 454, Novembro 1979.

[2] **M. S. Garrido:** *Etude théorique et expérimentale de la génératrice à redresseur. I. Equations de la génératrice à redresseur. Etude du régime permanent,* Revue E, Vol. VII, n.º 3, 1972.

ANNEXE 1

Expression analytique des fonctions rect $[\theta-2(K-1)\pi/n]$ et tri (ψ)

La fonction rect $[\theta-2(K-1)\pi/n]$ s'exprime de la manière suivante à partir des fonctions «échelon unité» $u(\theta-\tau)$ (fig. A.1.1):

$$\text{rect}\,[\theta-2(K-1)\pi/n] = u\,[\theta-2(K-1)\pi/n] + 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^K u\,[\theta-2(K-1)\pi/n-K\pi]$$

$$-u\,[-\theta+2(K-1)\pi/n]-2\sum_{1}^{\infty}(-1)^K u\,[-\theta+2(K-1)\pi/n-K\pi] \qquad \text{(A. 1. 1.)}$$

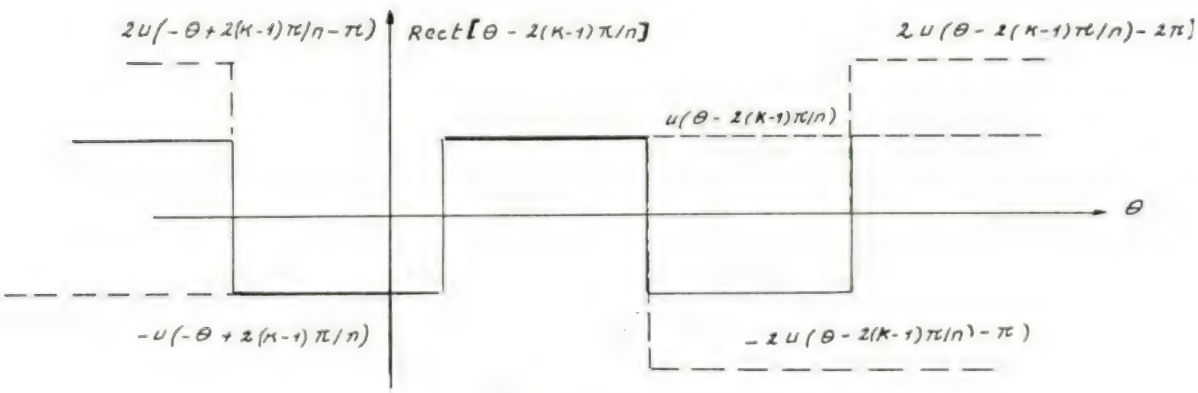


FIG. A 1.1

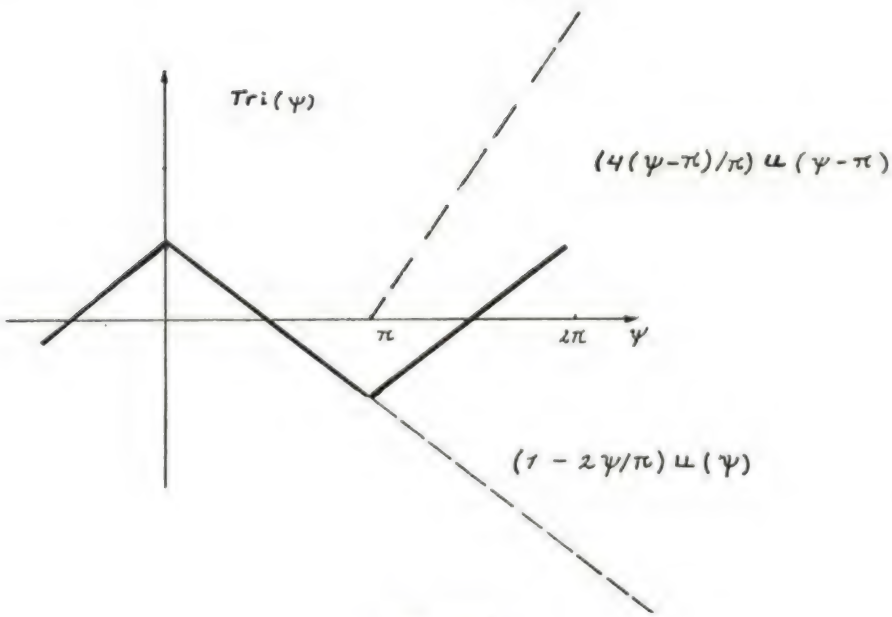


FIG. A 1.2

La fonction tri (ψ) s'exprime de la manière suivante à partir des mêmes fonctions «échelon unité» (fig. A.1.2.)

$$\text{tri}(\psi) = \left(1 - \frac{2\psi}{\pi}\right) u(\psi) - 2 \sum_{1}^{\infty} (-1)^K \cdot \left(\frac{2(\psi - K\pi)}{\pi}\right) u(\psi - K\pi)$$

$$+ \left(1 + \frac{2\psi}{\pi}\right) u(-\psi) - 2 \sum_{1}^{\infty} (-1)^K \cdot \left(\frac{2(\psi + K\pi)}{\pi}\right) u(-\psi - K\pi) \qquad \text{(A. 1.2)}$$

ANNEXE 2

Résolution des équations pour les modes 3 à n/2

Dans les modes 3 à n/2 décrits au paragraphe 2.2, il y a empiètement simultané de j phases consécutives à chaque borne de sortie, chaque phase entrant en commutation à son passage par l'axe neutre. Pour le mode K, le nombre de phases en empiètement à chaque borne vaut successivement $j=K$ puis $j=K-1$. Les conditions d'existence de ces modes sont les suivantes:

(i) il y a effectivement j phases consécutives en court-circuit à chaque borne de sortie. Ces court-circuits se faisant à travers les diodes correspondantes (à cathode commune à la borne positive et à anode commune à la borne négative) et les diodes ne pouvant laisser passer des courants inverses non nuls, ceci revient à admettre que la valeur algébrbique du courant dans chaque phase commutante à la borne positive (respectivement négative) est inférieure ou égale (respectivement supérieure ou égale) à la valeur algébrique du courant dans les phases entrées en commutation avant elle. Ainsi, si à la borne positive l'ordre d'entrée en commutation des phases est "', ", ', ... on doit avoir (fig. A. 2.1.).

$$I/2 > \ldots\ldots \qquad i''' > i'' > i' > -I/2$$

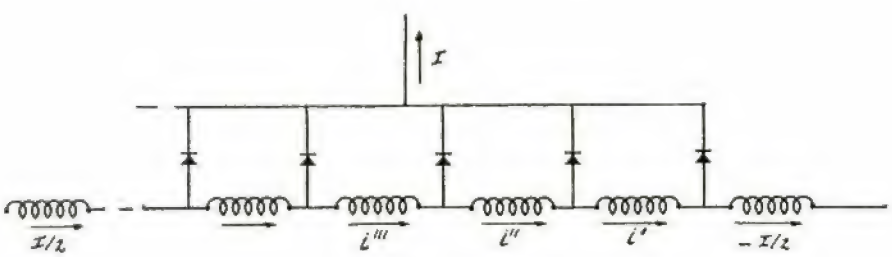


FIG. A. 2.1.

(ii) les tensions induites dans les phases non commutantes ne déplacent pas les positions auxquelles se produisent les changements de polarité des forces électromotrices totales induites dans les différents phases. En effet, le non respect de cette condition ferait que les phases n'entreraient pas en commutation à leur passage par l'axe neutre.

Pour vérifier l'existence des modes 3 à n/2, il suffit de résoudre les équations correspondant aux configurations considérées et de s'assurer que la solution obtenue satisfait aux conditions d'existence citées ci-dessus.

A un instant θ, $(0 < \theta < 2\pi)$, les phases en commutation à la borne positive sont les phases 1, n, n−1, ..., n−j+2 (j=K ou K−1). On peut écrire le système d'équations suivant, compte tenu de la symétrie qui doit exister entre les commutations à la borne positive et à la borne négative:

$$\begin{bmatrix} M_f i_f \\ M_f i_f \\ M_f i_f \\ \cdots \\ M_f i_f \end{bmatrix} = 2 M_o \begin{bmatrix} 1 & \text{tri}(2\pi/n) & \text{tri}(4\pi/n) & \cdots & \text{tri}[2(j-1)\pi/n] \\ \text{tri}(2\pi/n) & 1 & \text{tri}(2\pi/n) & \cdots & \text{tri}[2(j-1)\pi/n] \\ \text{tri}(4\pi/n) & \text{tri}(2\pi/n) & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{tri}[2(j-1)\pi/n] & \text{tri}[2(j-2)\pi/n] & \text{tri}[2(j-3)\pi/n] & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_n \\ (1-n) \\ \cdots \\ i_{(n-j+2)} \end{bmatrix}$$

(A. 2.1.)

Pour résoudre ce système, en désignant par (1), (2), ..., (i), ..., (j) les lignes de la matrice des coefficients, on effectue les substitutions linéaires suivantes

$$(i) \rightarrow (i) - 1/2\,[(i-1) + (i+1)] \qquad 2 \leqslant i \leqslant j-1 < n/2$$

Compte tenu de la linéarité de la fonction tri (ψ), le système (A. 2.1.) devient:

$$\begin{bmatrix} M_f i_f \\ 0 \\ 0 \\ \cdots\cdots \\ M_f i_f \end{bmatrix} = 2\,M_o \begin{bmatrix} 1 & \text{tri}\,2\,\pi/n & \text{tri}\,(4\,\pi/n) & \cdots\cdots & \text{tri}\,2\,(j-1)\,\pi/n \\ 0 & 1-\text{tri}\,(2\,\pi/n) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\text{tri}\,(2\,\pi/n) & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \text{tri}\,[2\,(j-1)\,\pi/n] & \text{tri}\,[2\,(j-2)\,\pi/n] & \text{tri}\,[2\,(j-3)\,\pi/n] & & 1 \end{bmatrix} \times \frac{d}{d\,\theta} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_n \\ i_{(n-1)} \\ \cdots\cdots \\ i_{(n-j+2)} \end{bmatrix} \tag{A. 2.2.}$$

La solution de ce dernier système est immédiate:

$$\frac{di_n}{d\,\theta} = \frac{di_{(n-1)}}{d\,\theta} = \cdots\cdots = \frac{di_{(n-j+3)}}{d\,\theta} = 0$$

$$\frac{di_1}{d\,\theta} = \frac{di_{(n-j+2)}}{d\,\theta} = \frac{M_f i_f}{2\,M_o\,[1 + \text{tri}\,[2\,(j-1)\,\pi/n]]} \tag{A. 2.3.}$$

Comme les dérivées du courant dans toutes les phases supposées en commutation sont $\geqslant 0$, la condition (i) est vérifiée. En effet on peut écrire pour le courant dans une phase commutante

$$i\,(\theta) = i\,(\theta_o) + \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{di}{d\,\theta}\,d\,\theta$$

Comme $\frac{di}{d\,\theta}$ est $\geqslant 0$, la fonction $i\,(\theta)$ est croissante et par conséquent

$$i'\,(\theta) = i''\,(\theta - 2\,\pi/n) < i''\,(\theta)$$

Les forces électromotrices totales e'_l aux bornes des phases non commutantes s'expriment par

$$e'_l = e_l - \sum_i \dot{\theta}\,M\,(l,i)\,\frac{di_i}{d\,\theta}\;;\; i \in (1, n, \ldots, n-j+2) \tag{A. 2.4.}$$

Compte tenu de (A. 2.3.), ces forces électromotrices valent

$$e'_l = \dot{\theta}\,M_f i_f \left[\text{rect}\,[\theta - 2\,(l-1)\,\pi/n] - \frac{\text{tri}\,[2\,(l-1)\,\pi/n] + \text{tri}\,[2\,(1+l-2)\,\pi/n]}{1 + \text{tri}\,[2\,(j-1)\,\pi/n]}\right] \tag{A. 2.5.}$$

Dans ces équations, le deuxième terme entre crochets correspond aux tensions induites par la variation du courant dans les phases commutantes. Comme sa valeur absolue est strictement inférieure à l'unité, la condition (ii) sur les instants de passage par zéro des f. é. m. totales aux bornes des phases non commutantes est également vérifiée.

L'existence des modes 3 à n/2 est ainsi justifiée.

PRODUTOS DE QUALIDADE

YTONG

- **BLOCOS**
  DENSIDADE - 0,5
  TOLERÂNCIA DIMENSIONAL - ± 1 mm
  RESISTÊNCIA (COMPRESSÃO) - 30 kg/cm²
  RESISTÊNCIA AO FOGO - SUPERIOR A 4 HORAS (A 240)
  MÓDULO ELASTECIDADE - 17.000 kg/cm²
  ISOLAMENTO TÉRMICO - $\lambda p = 0{,}15$ kcal/mh °C

- **COLAS**
  UTILIZAÇÃO - ALVENARIA YTONG E AZULEJOS
  RESISTÊNCIA (TRACÇÃO) ≥ SUPERIOR AO YTONG

- **PAVIMENTO ALIGEIRADO**
  VÃO MÁXIMO - 9,00 METROS
  CARGA MÁXIMA - 500 Kg/m²
  PESO - 10 A 30% INFERIOR AO TRADICIONAL
  ISOLAMENTO TÉRMICO - $\lambda p = 0{,}20$ kcal/mh °C
  RESISTÊNCIA AO FOGO - SUPERIOR A 2 HORAS (A 120)
  ACABAMENTO - IGUAL ÀS ALVENARIAS YTONG.

- **FORRAS TÉRMICAS**
  DENSIDADE - 0,4 E 0,5
  ESPESSURA - 7,5 cm
  ISOLAMENTO TÉRMICO - $\lambda p = 0{,}15$ kcal/mh °C

YTONG PORTUGUESA E. N. N.º 10 Km 17 Telefs: 201 99 06/7/8/9 COINA

N YT N R. do Passeio Alegre, 840 Telef.: 68 04 64 PORTO

Projecto apoiado em computador de Sistemas de Controlo

ISABEL LOURTIE (1)
FRANCISCO CARVALHAL (2)
PEDRO LOURTIE (3)

RESUMO

O artigo descreve detalhadamente o bloco de manipulação e tratamento de dados de um conjunto articulado de programas para o projecto apoiado em computador de sistemas de controlo. Apresentam-se os algoritmos utilizados e os correspondentes fluxogramas para além de alguns exemplos que os ilustram.

ABSTRACT

The paper describes with detail the data manipulation and data preparation block of a control systems computer-aided design package. The algoritms and corresponding flow charts are presented together with some application examples.

0. O COMPUTADOR E O PROJECTO DE SISTEMAS DE CONTROLO

O estudo do controlo de sistemas tem meio século de existência, não incluindo trabalhos anteriores sem uma sistematização de controlo, muito embora sistemas controlados existam desde sempre na natureza. O próprio homem é um mundo de sistemas controlados; desde a regulação do ritmo ou volémia cardíaca até ao seguimento de uma trajectória enquanto caminha. Neste último caso, um exemplo muito intuitivo, teremos a visão como sensor, o cérebro como controlador/processador de sinais e os músculos principalmente das pernas como actuadores. Estes sistemas não têm, no entanto órgãos de comando construídos pelo próprio homem. Estes são sistemas onde pode ter lugar um estudo do sistema controlado e da acção de controlo mas onde, apenas em situações excepcionais, o homem tem uma intervenção directa.

Na antiguidade podem-se detectar sistemas, inicialmente em cadeia aberta, em que já se encontra a acção de controlo. É o caso do mecanismo de Hero utilizado no séc. I para abrir as portas de um templo [1]. O ar aquecido pelo fogo sagrado obrigava a água de um depósito a passar para um recipiente, cujo peso aumentava, até compensar a acção de um contrapeso e levar à abertura da porta.

Em 1788 aparece o regulador de James Watt, para regulação de velocidade de motores, vulgarmente indicado como o primeiro regulador em cadeia fechada.

Em 1922 aparece um estudo por Mimorsky em que são introduzidos elementos não-lineares no controlo aplicado ao sistema direccional de navios.

Só em 1934 aparece um trabalho de Hazen em que apresenta alguma da nomenclatura e sistematização de sistemas de controlo, em particular de servomecanismos. De então para cá há uma aceleração considerável no desenvolvimento destas matérias, sobretudo depois da II Guerra Mundial.

Os métodos clássicos de análise e projecto de sistemas de controlo, em virtude das limitações impostas pelo cálculo manual, baseiam-se em aproximações, ábacos e outras técnicas simplificativas e sobretudo no domínio da frequência. Simultaneamente o desenvolvimento e redescoberta de métodos matemáticos hoje empregues foi sendo feita com a motivação do controlo de sistemas, embora a sua aplicação tenha sido limitada na prática a aplicações simples.

O advento do computador veio então permitir o rápido desenvolvimento de teorias até aí não exploradas; começaram então os grandes desenvolvimentos das técnicas no domínio do tempo. Os grandes investimentos realizados na corrida para o espaço e as aplicações militares, forneceram a motivação e os meios necessários a um rápido desenvolvimento do estudo do controlo

(1) Assistente do Instituto Superior Técnico, Investigador do Centro de Automática da Universidade Técnica de Lisboa
(2) Especialista do Laboratório Nacional de Engenharia Civil.
(3) Prof. Auxiliar do Instituto Superior Técnico, Investigador do Centro de Automática da Universidade Técnica de Lisboa.

automático. No entanto, cada vez mais estes desenvolvimentos vão encontrando aplicação noutros domínios.

A necessidade de cada vez maior precisão, qualidade, rendimento, leva a considerar no projecto de sistemas de controlo um detalhe cada vez maior tanto na descrição do sistema como nas especificações de controlo. Surgem assim os métodos de tratamento de sistemas multivariáveis, o controlo adaptativo, estocástico, etc. O desenvolvimento da modelação e os sucessos obtidos, aliados às facilidades de cálculo dos computadores digitais, levam a estender estes métodos aos campos económico, biológico, social, etc. Em todo este desenvolvimento a vulgarização do uso do computador é pedra fundamental, na medida em que permite realizar cálculos até então impensáveis.

É assim que os mais variados tipos de projecto se apoiam cada vez mais no computador embora nalguns casos se limitem a efectuar os cálculos mais complexos. A proliferação de terminais e a utilização de sistemas operadores cada vez mais sofisticados e protegidos contra falhas de utilização, permitem a utilização da máquina mesmo por operadores menos experientes. No entanto, para que o seu trabalho seja proveitoso, é necessário que existam programas estruturados de forma a facilitar o seu contacto com a máquina.

Neste sentido, aparecem os sistemas articulados de programas para o projecto em computador, usando técnicas conversacionais, i. e., incluindo no programa as perguntas e respostas que possam orientar o trabalho do utilizador. É com este espírito que está a ser desenvolvido o trabalho que aqui se descreve e que resulta de uma colaboração entre o C. A. U. T. L. e o L. N. E. C. Este conjunto articulado de programas destina-se ao projecto em computador de sistemas de controlo, usando técnicas conversacionais e com uma estrutura expandível por forma a integrar todas as técnicas de análise e síntese que se considerem relevantes neste domínio.

1. MANIPULAÇÃO DE DADOS DE SISTEMAS UNIVARIÁVEIS

1.1. INTRODUÇÃO

O Projecto Apoiado em Computador de Sistemas de Controlo Automático — CONPAC — é constituído por dois grandes blocos de programação, um relativo a sistemas univariáveis e outro a sistemas multivariáveis.

Cada um destes blocos realiza três funções diferentes:

— Tratamento de Dados
— Projecto de Sistemas de Controlo
— Simulação no tempo

Nos sistemas univariáveis, o tratamento de dados é realizado em dois blocos distintos:

— Manipulação de Dados
— Adaptação da função de transferência a dados experimentais («curve fitting»)

Quanto ao projecto de sistemas univariáveis serão implementados os seguintes métodos:

— Diagrama de Bode
— Diagrama de Nyquist
— Diagrama de Evans («Root Locus»)

No projecto de sistemas multivariáveis considera-se:

— Método baseado nos Teoremas de Gershgorin e de Ostrowsky
— Método de Controlo Modal (deslocamento de polos)
— Método do Espaço de Estados

1.2. SISTEMAS UNIVARIÁVEIS

Para os sistemas univariáveis a estrutura utilizada tem o seguinte diagrama de blocos:

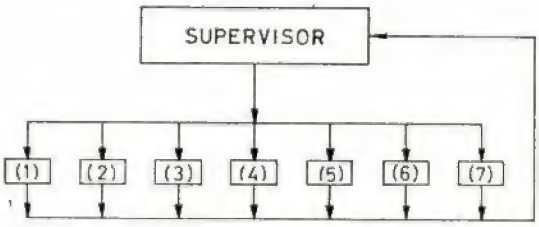


FIG. 1

(1) Manipulação de dados
(2) Sistema em anel fechado
(3) Resposta no tempo
(4) Diagrama de Nyquist
(5) Diagrama de Bode
(6) Lugar geométrico das raizes («Root Locus»)
(7) Adaptação da função de transferência a dados experimentais («curve fitting»)

Do ponto de vista da programação, o «supervisor» é o programa principal e os blocos numerados de (1) a (7) são estruturados como sub-rotinas, pelo que os contactos entre eles são possíveis através do «supervisor». Esta estrutura, usando como linguagem de programação o FORTRAN, está a ser desenvolvida no computador DEC-10 do L. N. E. C.

Os sistemas a tratar obedecem à nomenclatura apresentada no seguinte diagrama de blocos:

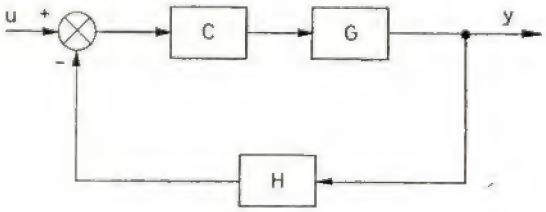


FIG. 2

G — sistema controlado
C — controlador
H — realimentação

O Bloco de Manipulação de dados aceita a descrição dos sistemas C, G e H de três formas diferentes:

— Espaço de Estados
— Função de transferência na forma racional
— Função de transferência factorizada

1.3. FLUXOGRAMA DO BLOCO DE MANIPULAÇÃO DE DADOS

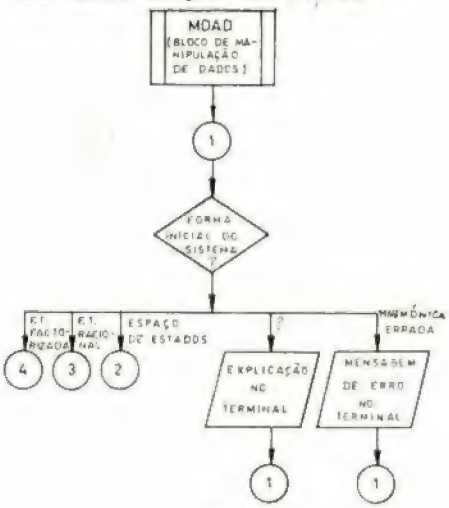


FIG. 3

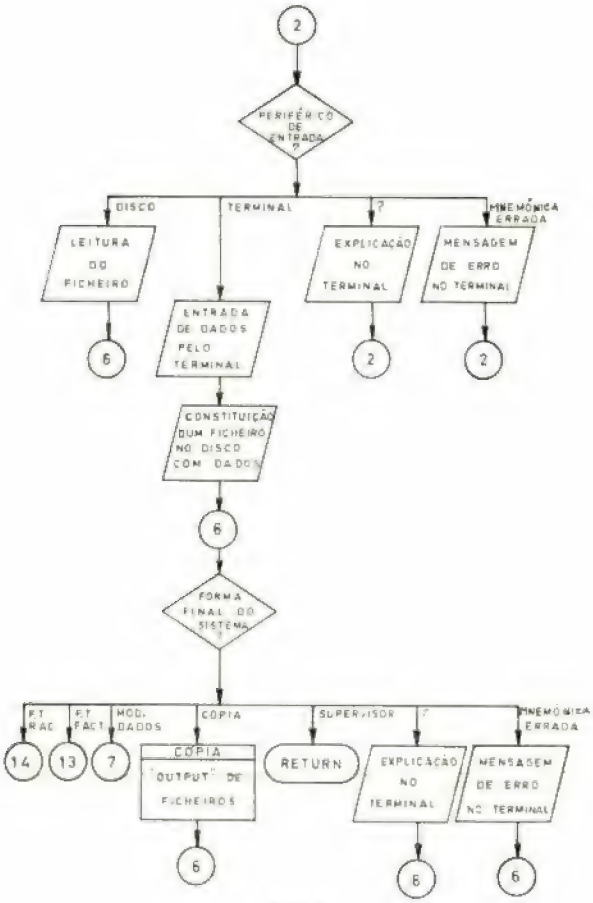


FIG. 4

Este bloco permite realizar qualquer transformação entre as diferentes representações, servindo de apoio a todos os outros.

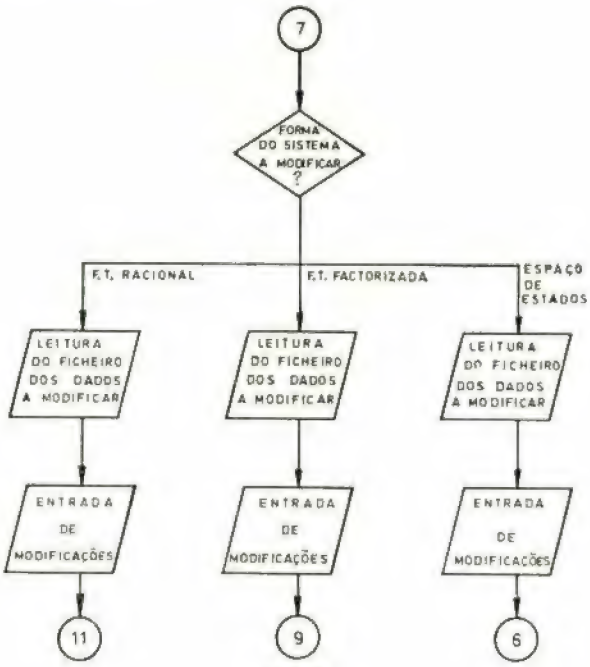


FIG. 5

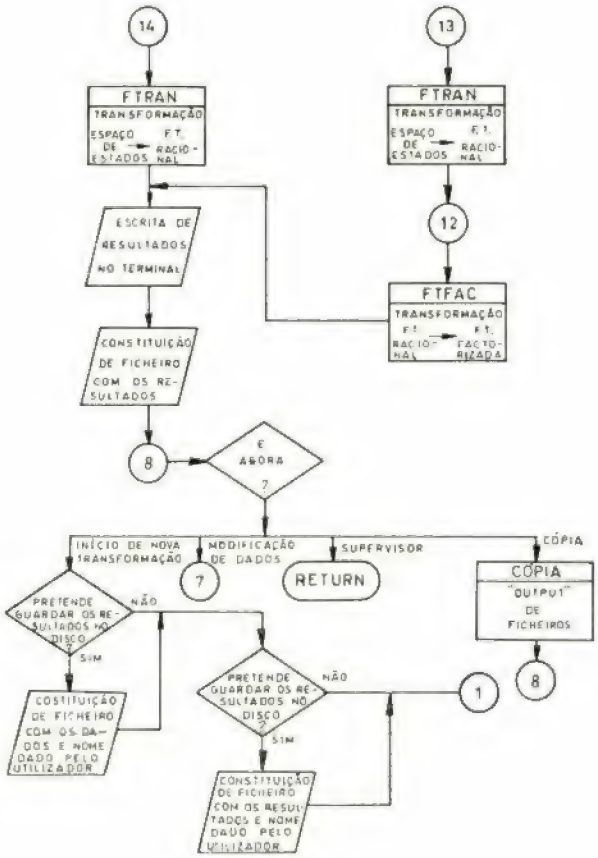


FIG. 6

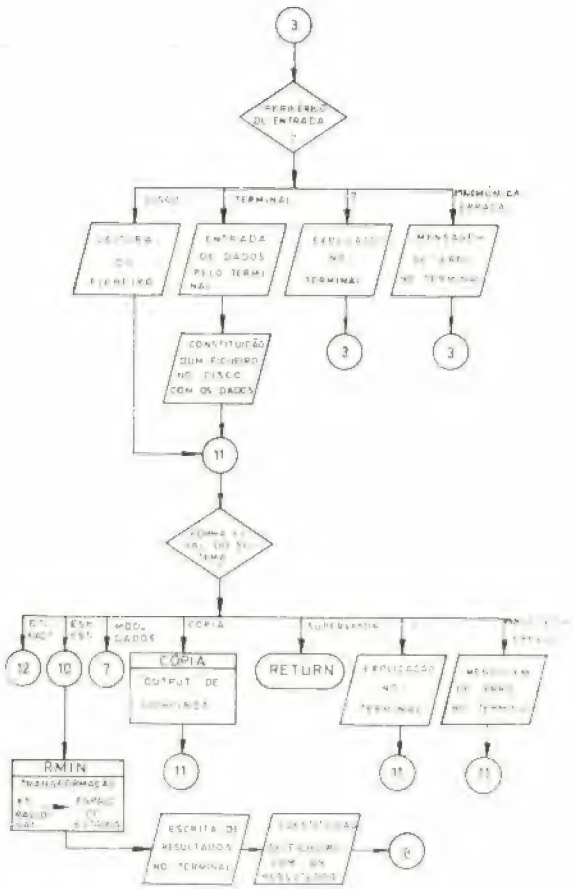


FIG. 7

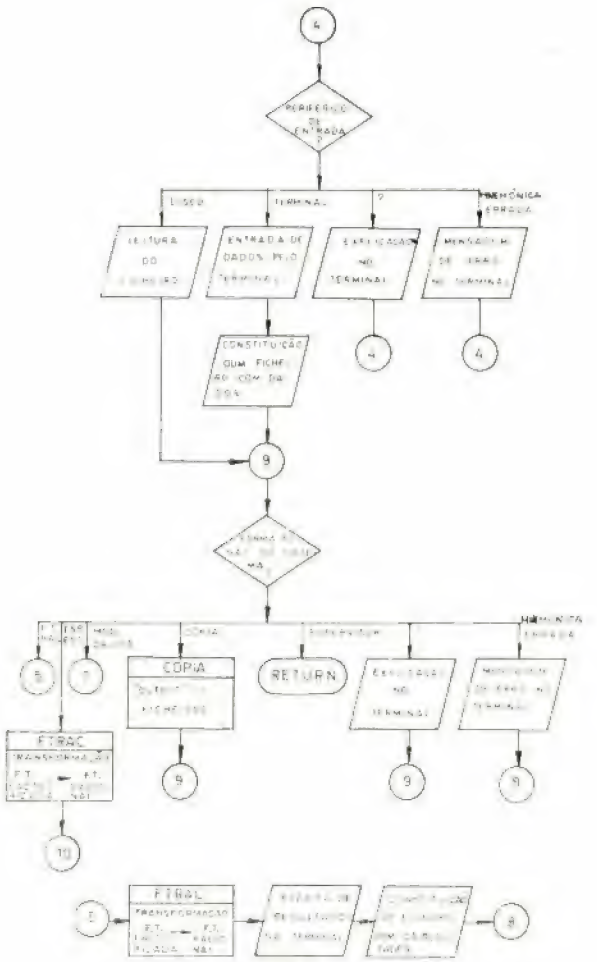


FIG. 8

1.4. TRANSFORMAÇÃO DE REPRESENTAÇÕES

1.4.1. Conceitos Básicos

1.4.1.1. Espaço de Estados

$$[x] = [A].[x] + [B].u$$

$$y = [C].[x] + D.u$$

em que

$[A], [B], [C]$ — matrizes de coeficientes reais e dimensões nxn, nx1 e 1xn, respectivamente.

D — coeficiente real

$[x]$ — vector coluna das variáveis de estado

u — entrada

y — saida

Sendo n o número de variáveis de estado, tem-se, como limitação de programação

$$1 \leqslant n \leqslant 10$$

1.4.1.2. Função de Transferência na forma racional

$$F.T. = \frac{b_m s^m + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_0} e^{-\alpha s}$$

em que

$$\left.\begin{matrix} a_{n-1}, \ldots\ldots, a_0 \\ b_m, \ldots\ldots, b_0 \end{matrix}\right\} \text{coeficientes reais}$$

α — atraso no tempo. (só para G(s)). É opcional.

Tem-se $n, m \leqslant 10$

1.4.1.3. Função de Transferência factorizada

$$F.T. = K \frac{(s - z_{nz}).(s - z_{nz-1}) \ldots\ldots (s - z_1)}{(p - p_{np}).(s - p_{np-1}) \ldots\ldots (s - p_1)} e^{-\alpha s}$$

em que

$z_{nz}, \ldots\ldots, z_1$ — zeros do sistema

$p_{np}, \ldots\ldots, p_1$ — polos do sistema

K — factor de ganho

α — atraso no tempo. (Só para G(s)). É opcional.

Tem-se $n_z, n_p \leqslant 10$

1.4.2. Espaços de Estados → Função de Transferência racional

Esta transformação é realizada pela sub-rotina FTRAN, de acordo com o fluxograma seguinte:

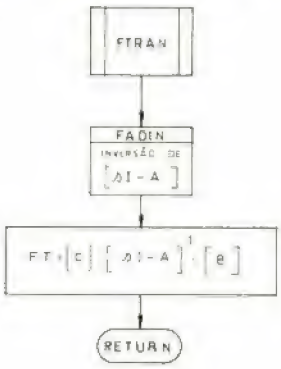


FIG. 9

Relativamente à inversão da matriz $[sI-A]$, tem-se:

$$[sI-A]^{-1} = \frac{\text{Adj}\,[sI-A]}{|sI-A|}$$

$$\text{Adj}\,[sI-A] = [R_{n-1}]s^{n-1} + [R_{n-2}]s^{n-2} + \ldots + [R_1]s + [R_0]$$

$$|sI-A| = s^n + \alpha_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots\ldots + \alpha_1\, s + \alpha_0$$

Os coeficientes α_j e as matrizes $[R_j]$ são determinados na sub-rotina FADIN, utilizando o algoritmo de Faddeev **[3]**.

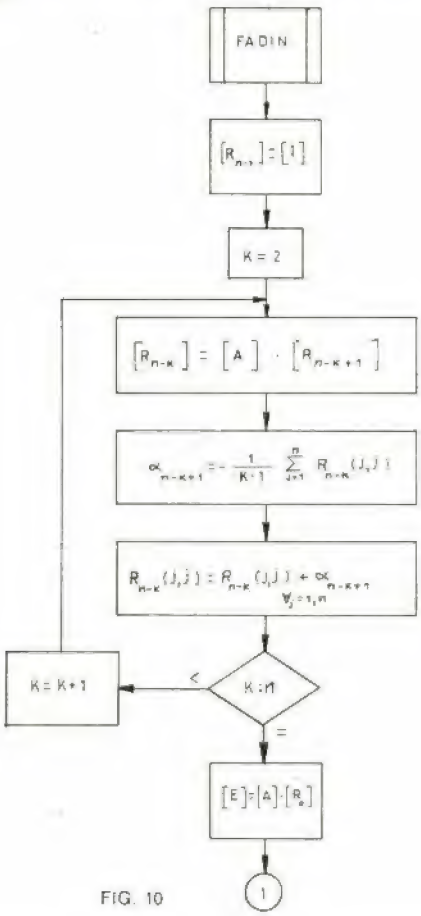


FIG. 10

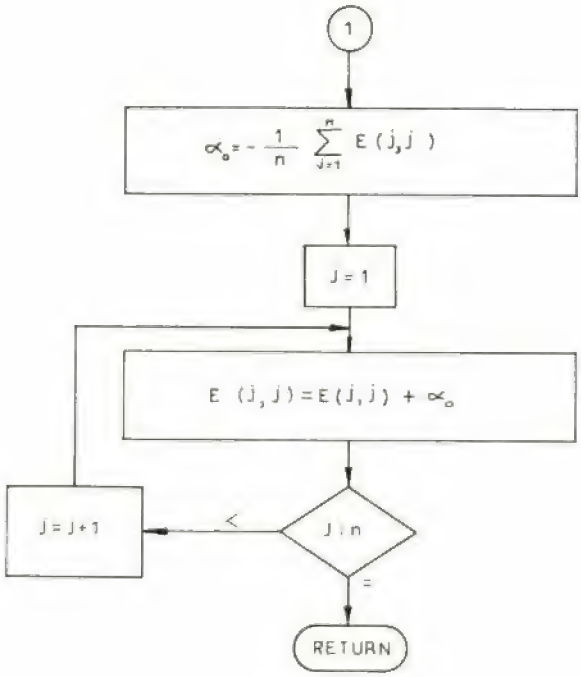


FIG. 11

1.4.3. Função de Transferência racional → Função de transferência factorizada

Esta transformação é realizada pela sub-rotina FTFAC.

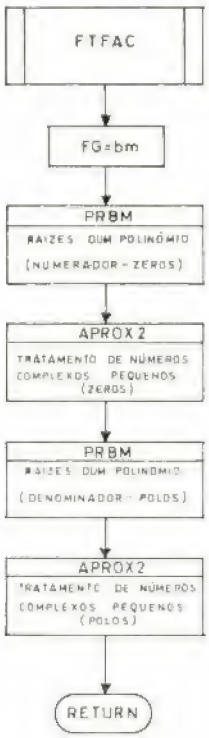


FIG. 12

A sub-rotina PRBM, pertencente à biblioteca do DEC-10 do LNEC, (Scientific Subroutine Package-IBM), destina-se a determinar as raizes de qualquer polinómio de coeficientes reais.

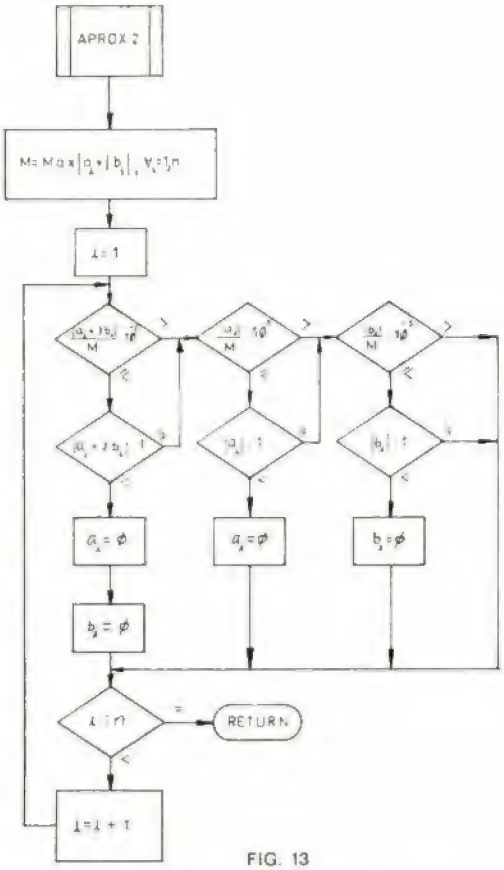


FIG. 13

1.4.4. Função de Transferência factorizada → Função de Transferência racional

Esta transformação é realizada pela sub-rotina FTRAC.

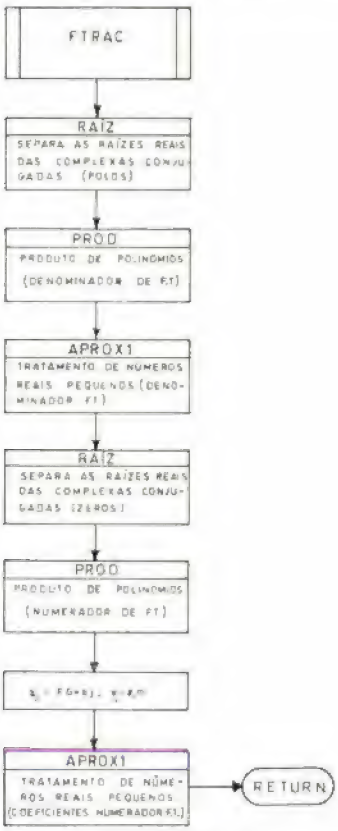


FIG. 14

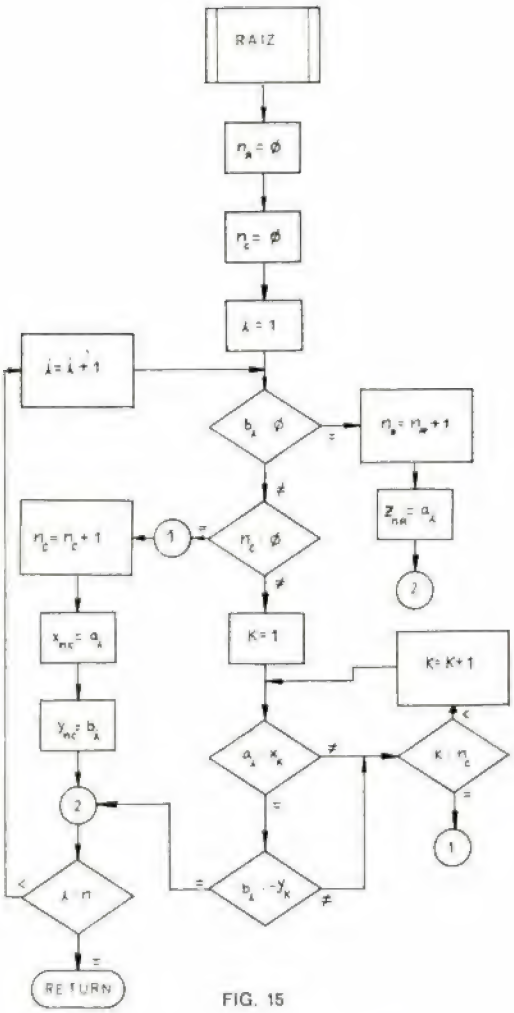


FIG. 15

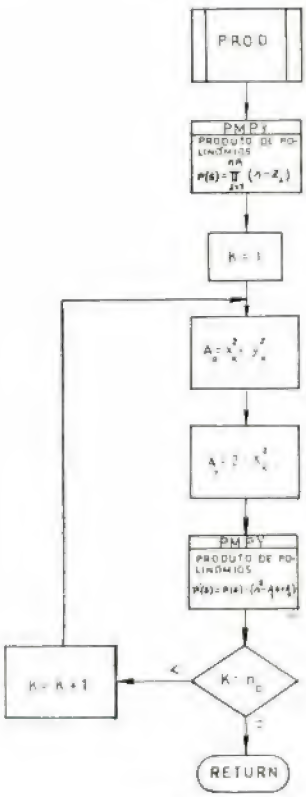


FIG. 16

A sub-rotina PMPY, que realiza o produto de polinómios de coeficientes reais, pertence à biblioteca do DEC-10 do LNEC (SSP-IBM).

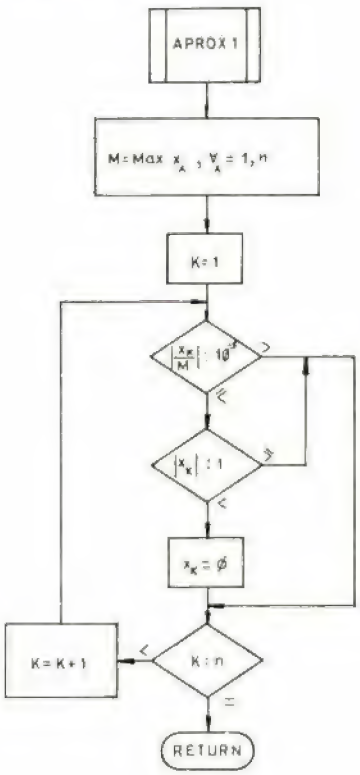


FIG. 17

1.4.5. Função de Transferência racional → Espaço de Estados

Esta transformação só é possível se $m \leqslant n$.
Sendo dada a função de transferência

$$F.T. = \frac{b_m\ s^m + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}\ s^{n-1} + \ldots\ldots + a_0}$$

tem-se, para $m < n$:

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} -a_0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{matrix} \\ \hline I & \end{array}\right]$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad [C] = [\ 0 \quad | \ 1] \quad D = 0$$

[A] é a matriz companheira que, escrita nesta forma, permite obter a matriz [B] por simples substituição dos coeficientes do polinómio do numerador da função de transferência.

Se $m = n$, tem-se

$$F.T. = \frac{B_n\ s^n + \ldots\ldots\ldots\ldots + B_0}{s^n + a_{n-1}\ s^{n-1} + \ldots + a_0} = B_n + \frac{b_m\ s^m + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}\ s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

sendo

$m = n - 1$

$b_k = B_k - B_n\ a_k \quad , \ \forall_k = 0, m$

Neste caso, tem-se:

— $D = B_n$

— [A], [B] e [C] são as matrizes do Espaço de Estados determinados para a função de transferência,

$$F.T. = \frac{b_m\ s^m + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}\ s^{n-1} + \ldots\ldots + a_0} \quad \text{em que } m < n.$$

Esta transformação é realizada pela sub-rotina RMIN.

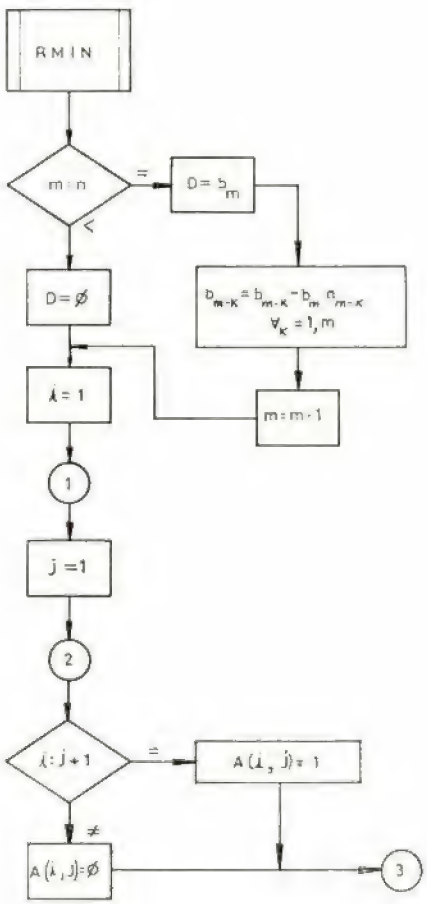


FIG. 18

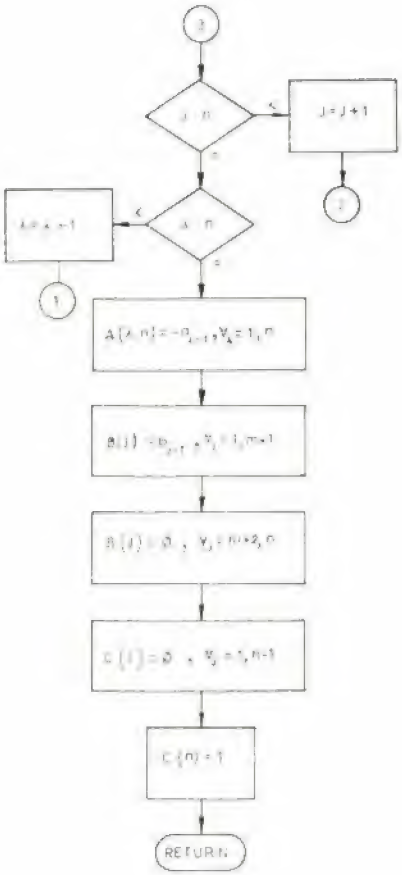


FIG. 19

1.5. ORGANIZAÇÃO DA INFORMAÇÃO

Toda a informação, quer seja dada pelo utilizador ou gerada pelo programa, é organizada em ficheiros no disco. Esta forma de tratar os dados equivale a encarar o disco como uma memória ilimitada, acessível a todos os blocos.

1.5.1. Constituição de ficheiros

Qualquer ficheiro no disco é individualizado por uma variável de precisão dupla, com a seguinte forma:

"NOME . EXT"

em que

"NOME" — Variável alfanumérica até 5 caracteres (nome do ficheiro.

"EXT" — Conjunto de 3 letras impostas pelo programa indicando o conteúdo ou a finalidade do ficheiro.

Os ficheiros, que permitem transmitir informação dentro da estrutura global, são escritos em representação binária.

Nestes ficheiros "EXT" indica a que tipo de sistema se referem, tendo-se previsto as seguintes possibilidades:

ABG — sistema controlado (G)
ABC — malha de compensação (C)
ABH — malha de retroacção (H)
} na forma de espaço de estados

GSR — G(s)
CSR — C(s)
HSR — H(s)
} na forma racional

GSF — G(s)
CSF — C(s)
HSF — H(s)
} factorizados

Quanto à variável "NOME", esta pode ser imposta pelo programa ou escolhida pelo utilizador.

Quando imposta pelo programa, "NOME" depende do conteúdo do ficheiro, tendo-se:

G — sistema G(s)
C — malha de compensação C(s)
H — malha de retroacção H(s)
ABCD — Espaço de Estados para G, C ou H.

Estes ficheiros são gerados automaticamente pelo programa sempre que surgem novos dados.

Quando escolhido pelo utilizador, "NOME" representa qualquer variável alfanumérica com o máximo de 5 caracteres. Estes ficheiros são gerados, a pedido do utilizador, quando se inicia uma nova transformação.

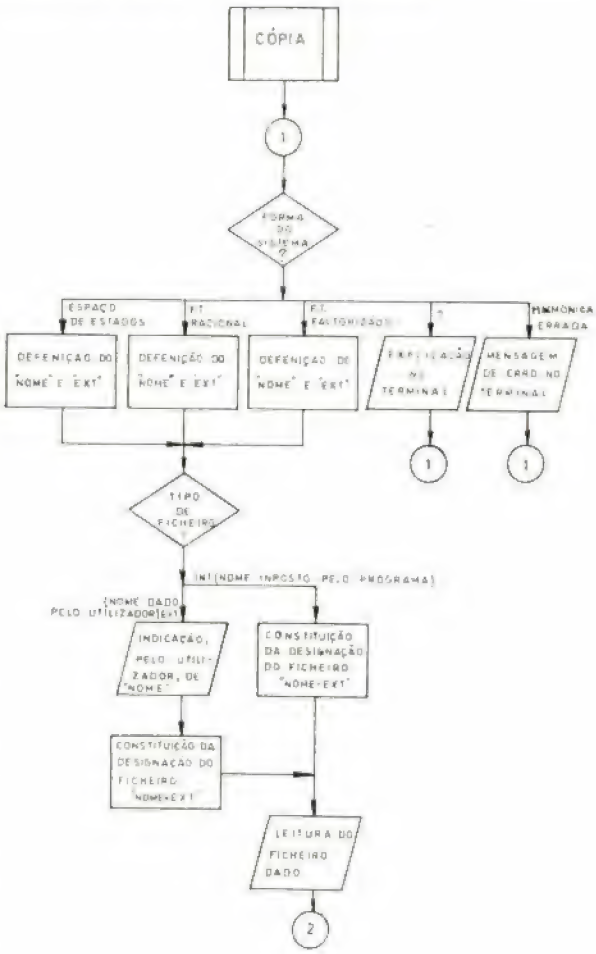


FIG. 20

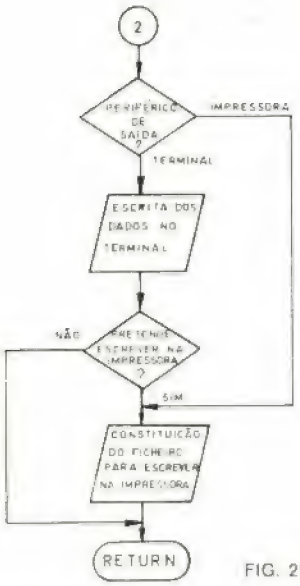


FIG. 21

1.5.2. «Output» de ficheiros

O «output» de ficheiros, no terminal ou na impressora, é realizado pela sub-rotina COPIA (ver figs. 20 e 21).

Quando se pretende o «output» na impressora, é constituido um ficheiro de extensão "LPT" e "NOME" dado pelo utilizador. Estes ficheiros são automaticamente transcritos logo que o utilizador termine a utilização do computador, sendo em seguida destruidos.

1.6. RELAÇÃO COM O UTILIZADOR

Esta estrutura, programada em modo conversacional, permite a interrupção da sequência de execução em diversos pontos pré-definidos do programa. A comunicação utilizador-programa é realizada por um conjunto de mnemónicas, reconhecidas por todos os blocos.

— Descrição dos sistemas:

ABG — G
ABC — C
ABH — H
} na forma de espaço de estados

GSR — G(s)
CSR — C(s)
HSR — H(s)
} na forma racional

GSF — G(s)
CSF — C(s)
HSF — H(s)
} factorizada

— Periféricos

TTY — Terminal
DSK — Disco
LPT — Impressora

— Ficheiros

INT — Ficheiros com nome gerado pelo programa
EXT — Ficheiros com nome dado pelo utilizador

— Ordens de comando:

COP — «output» de ficheiros
MOD — Modificação de dados
INI — Recomeço deste bloco
SUP — Regresso ao supervisor

— Outras hipóteses:

? — Pedidos de informação
S — Sim
N — Não

Foi prevista a possibilidade de erro por parte do utilizador. Nesse sentido, sempre que a mnemónica dada não for reconhecida pelo programa, é impressa uma mensagem de erro e repetida a pergunta.

São também testados alguns dos dados numéricos indicados pelo utilizador. Está neste caso, por exemplo, o teste efectuado aos pólos e zeros de um sistema, com vista a garantir que todos os complexos sejam conjugados.

1.7. EXEMPLOS

Nota: Nos exemplos que apresentamos, todos os caracteres impressos pelo utilizador encontram-se sublinhados.

1.7.1. Entrada de Dados

```
BLOCO DE MANIPULACAO DE DADOS


FORMA INICIAL DO SISTEMA:ABG

PERIFERICO DE ENTRADA:TTY

SISTEMA NA FORMA DE FUNCAO DE TRANSFERENCIA RACIONAL

                N                N-1
      B(N) S + B(N-1) S + . . . . + B(1) S + B(0)
FT = ---------------------------------------------- EXP(-ALFA S)
                M                M-1
           S + A(M-1) S + . . . . + A(1) S + A(0)

EM QUE:
B(J),A(J)          COEFICIENTES REAIS
ALFA               ATRAZO NO TEMPO (SO PARA G(S)).E OPCIONAL.


GRAU DO NUMERADOR:0

IMPRIMA OS COEFICIENTES DO POLINOMIO EM S DO NUMERADOR,
PELA SEGUINTE ORDEM:B(N),B(N-1),...,B(1),B(0),

47

GRAU DO DENOMINADOR:0

IMPRIMA OS COEFICIENTES DO POLINOMIO EM S DO DENOMINADOR,
PELA SEGUINTE ORDEM:A(N-1),A(N-2),...,A(1),A(0),

2,0 47

O SISTEMA APRESENTA ALGUM ATRAZO NO TEMPO?N

INDIQUE A REFERENCIA DO SISTEMA
( ATE 5 CARACTERES ):TESTE

TERMINOU A ENTRADA DE DADOS
```

FIG. 22

Neste exemplo introduziu-se a função de transferência.

$$G(s) = \frac{49}{s^2+2.8s+49}$$

utilizando como periférico de entrada o terminal.

1.7.2. Modificação de Dados

```
FORMA FINAL DO SISTEMA:MOD

PRETENDE MODIFICAR O NUMERADOR?_

GRAU DO NUMERADOR:1

IMPRIMA OS COEFICIENTES DO POLINOMIO EM S DO NUMERADOR
PELA SEGUINTE ORDEM:B(N),B(N-1),...,B(1),B(0).

1 -49

PRETENDE MODIFICAR O DENOMINADOR?N

PRETENDE MODIFICAR O ATRAZO NO TEMPO?N

TERMINOU A ENTRADA DE DADOS


FORMA FINAL DO SISTEMA:OSE
```

FIG. 23

Neste exemplo modificou-se a função de transferência dada em 1.7.1. de forma a ter-se

$$G(s) = \frac{s-49}{s^2+2.8s+49}$$

1.7.3 F. T. factorizada → Espaço de Estados

Dada a função de transferência factorizada

$$G(s) = \frac{(s+1-j2)\,(s+1+j2)}{(s+1-j3)\,(s+1+j3)\,(s+5)}$$

pediu-se, neste exemplo, a determinação do espaço de estados

```
FORMA FINAL DO SISTEMA:GIG

DETERMINACAO DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA NA FORMA RACIONAL

DETERMINACAO DE A,B,C,D

TESTE


MATRIZ A:

L 1:  0.0000E+00  0.0000E+00  5.0000E+01
L 2:  1.0000E+00  0.0000E+00 -2.0000E+01
L 3:  0.0000E+00  1.0000E+00 -7.0000E+00

MATRIZ B:

L 1:  5.0000E+01
L 2:  2.0000E+01
L 3:  1.0000E+01

MATRIZ C:

L 1:  0.0000E+00  0.0000E+00  1.0000E+00
```

FIG. 24

1.7.4. «output» de ficheiros

```
E AGORA?COP

COPIA DE FICHEIROS NO TERMINAL OU NA IMPRESSORA


FORMA DO SISTEMA:OSE

TIPO DE FICHEIRO:INI

PERIFERICO DE SAIDA:TTY

FUNCAO DE TRANSFERENCIA G(S) RACIONAL:

REFERENCIA: TESTE


NUMERADOR:

COEF( 0)=-4.9000E+01
COEF( 1)= 1.0000E+00

DENOMINADOR:

COEF( 0)= 4.9000E+01
COEF( 1)= 2.8000E+00
COEF( 2)= 1.0000E+00
PRETENDE CRIAR FICHEIRO DE EXTENSAO LPT?N

FIM DE COPIA.

BLOCO DE MANIPULACAO DE DADOS.
```

FIG. 25

Este exemplo mostra como proceder no caso de se pretender escrever no terminal a função de transferência dada em 1.7.2., que se encontrava memorizada num ficheiro gerado internamente pelo programa.

1.7.5. Recomeço do Bloco de Manipulação de Dados

```
E AGORA?INI

PRETENDE GUARDAR A DESCRICAO INICIAL DO SISTEMA NO DISCO?N

NOME DO FICHEIRO(ATE 5 CARACTERES):TESTE

E A DESCRICAO FINAL?N

BLOCO DE MANIPULACAO DE DADOS


FORMA INICIAL DO SISTEMA:OSE
```

FIG. 26

Pedido o recomeço do Bloco de Manipulação de Dados, constituiu-se um ficheiro de "NOME" ≡ "TESTE" com a descrição inicial do sistema.

1.7.6. Mensagens explicativas

Nos dois exemplos que a seguir se apresentam, mostra-se a resposta do programa ao pedido de explicação do utilizador (impressão do caractere?).

1.7.6.1.

```
E ADEQUADO?

AS SEGUINTES OPCOES SAO POSSIVEIS:
INI          INICIAR A TRANSFORMACAO DUM NOVO SISTEMA
SUP          REGRESSAR AO SUPERVISOR UNIV
MOD          MODIFICAR UM CONJUNTO DE DADOS(E RECOMECAR ESTE BLOCO)
COF          REALIZAR O OUTPUT DE FICHEIROS


E ADEQUADO?INI
```

FIG. 27

1.7.6.2.

```
FORMA FINAL DO SISTEMA:?

PODE OPTAR POR UMA DAS SEGUINTES FORMAS:

OSF          FUNCAO DE TRANSFERENCIA G(S) FACTORIZADA
ABS          SISTEMA NA FORMA DE ESPACO DE ESTADOS

OU, AINDA, INTERROMPER COM UM DOS SEGUINTES COMANDOS:

SUP          REGRESSAR AO SUPERVISOR UNIV.
MOD          MODIFICAR UM CONJUNTO DE DADOS(E RECOMECAR ESTE BLOCO)
COF          REALIZAR O OUTPUT DE FICHEIROS
INI          INICIAR A TRANSFORMACAO DUM NOVO SISTEMA


FORMA FINAL DO SISTEMA:INI
```

FIG. 28

1.7.7. Detecção de erros

1.7.7.1.

```
PERIFERICO DE ENTRADA:DXK

A MNEMONICA ESTA ERRADA.
IMPRIMA ? PARA MAIS INFORMACAO.
TENTE NOVAMENTE.


PERIFERICO DE ENTRADA:DSK
```

FIG. 29

O erro cometido pelo utilizador ao imprimir a mnemónica do periférico (disco) foi detectado pelo sistema.

1.7.7.2.

```
FORMA INICIAL DO SISTEMA:OSF

PERIFERICO DE ENTRADA:TTY

SISTEMA NA FORMA DE FUNCAO DE TRANSFERENCIA FACTORIZADA

        (S-Z1) (S-Z2) . . . . (S-ZN)
FT = FG ---------------------------- EXP(-ALFA S)
        (S-P1) (S-P2) . . . . (S-PM)

EM QUE:
ZJ          ZEROS DE FT
PJ          POLOS DE FT
FG          FACTOR DE GANHO
ALFA        ATRAZO NO TEMPO(SO PARA G(S)). E OPCIONAL.


NUMERO DE ZEROS:15

O SISTEMA NAO ACEITA POLINOMIOS DE GRAU TAO ELEVADO

NUMERO DE ZEROS:1
```

FIG. 30

A indicação de um número superior a 10 para o n.º de zeros de um sistema, conduz à não aceitação da entrada.

1.7.7.3.

Este exemplo refere-se à definição do numerador da função de transferência factorizada. A indicação de zeros que não sejam complexos conjugados, conduz à não aceitação da entrada.

```
NUMERO DE ZEROS:2

IMPRIMA OS ZEROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA.

ZERO 1:1 2

ZERO 2:1 3

OS ZEROS TEM DE SER COMPLEXOS CONJUGADOS.
TENTE NOVAMENTE.


IMPRIMA OS ZEROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA.
```

FIG. 31

ANEXO: Demonstração do algoritmo de Faddeev

Designando por $[sI-A]^*$ a matriz obtida por aplicação do algoritmo de Faddeev,

$$[sI-A]^* = \frac{[R_{n-1}]\, s^{n-1} + [R_{n-2}]\, s^{n-2} + \ldots + [R_1]\, s + [R_0]}{|sI-A|}$$

em que

(1) $|sI-A| = s^n + \alpha_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots\ldots + \alpha_1\, s + \alpha_0$ (equação caracteristica da matriz $[A]$)

(2.A) $[R_{n-1}] = [I]$

(2.B) $[R_{n-k}] = [A]\,[R_{n-k+1}] + \alpha_{n-k+1}\,[I]$

$$= [A]^{k-1} + \alpha_{n-1}\,[A]^{k-2} + \alpha_{n-2}\,[A]^{k-3} + \ldots\ldots + \alpha_{n-k+2}\,[A] + \alpha_{n-k+1}\,[I],\ \forall k = 2,n$$

Tem-se:

$$[sI-A]\cdot[sI-A]^* = [sI-A]\cdot\frac{[R_{n-1}]\, s^{n-1} + [R_{n-2}]\, s^{n-2} + \ldots + [R_1]\, s + [R_0]}{|sI-A|} =$$

$$= \frac{1}{|sI-A|}\cdot\{[sI-A]\cdot([R_{n-1}]\, s^{n-1} + [R_{n-2}]\, s^{n-2} + \ldots + [R_1]\, s + [R_0])\} =$$

$$= \frac{1}{|sI-A|}\cdot\{[R_{n-1}]\, s^n + [R_{n-2}]\, s^{n-1} + \ldots + [R_1]\, s^2 + [R_0]\, s - [A]\,[R_{n-1}]\, s^{n-1} -$$

$$- [A]\,[R_{n-2}]\, s^{n-2} - \ldots - [A]\,[R_1]\, s - [A]\,[R_0]\}$$

Atendendo às relações (2.A) e (2.B), tem-se:

$$[sI-A]\cdot[sI-A]^* = \frac{1}{|sI-A|}\,\{[I]\, s^n + \alpha_{n-1}\,[I]\, s^{n-1} + \ldots + \alpha_2\,[I]\, s^2 + \alpha_1\,[I]\, s - [A]\,[R_0]\}$$

Particularizando a relação (2.B) para $k = n$, vem:

(3) $$[sI-A]\cdot[sI-A]^* = \frac{1}{|sI-A|}\,\{[I]\, s^n + \alpha_{n-1}\,[I]\, s^{n-1} + \ldots + \alpha_2\,[I]\, s^2 + \alpha_1\,[I]\, s -$$

$$- ([A]^n + \alpha_{n-1}\,[A]^{n-1} + \ldots + \alpha_2\,[A]^2 + \alpha_1\,[A])\}$$

Atendendo ao teorema de Hamilton-Cayley — qualquer matriz quadrada satisfaz à sua equação caracteristica — podemos escrever:

$$[A]^n + \alpha_{n-1}\,[A]^{n-1} + \ldots + \alpha_1\,[A] + \alpha_0\,[I] = [0]$$

(4) $$[A]^n + \alpha_{n-1}\,[A]^{n-1} + \ldots + \alpha_1\,[A] = -\alpha_0\,[I]$$

Substituindo (4) em (3), tem-se:

$$[sI-A]\cdot[sI-A]^{*}=\frac{1}{|sI-A|}\cdot\{[I]\,s^{n}+\alpha_{n-1}[I]\,s^{n-1}+\alpha_{n-2}[I]\,s^{n-2}+\ldots+\alpha_{1}[I]\,s-(-\alpha_{0}[I])\}$$

$$=\frac{1}{|sI-A|}\cdot\{[I]\,s^{n}+\alpha_{n-1}[I]\,s^{n-1}+\alpha_{n-2}[I]\,s^{n-2}+\ldots+\alpha_{1}[I]\,s+\alpha_{0}[I]\}$$

$$=\frac{1}{|sI-A|}\cdot\begin{bmatrix}(s^{n}+\alpha_{n-1}\;s^{n-1}+\ldots+\alpha_{1}\,s+\alpha_{0}) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & (s^{n}+\alpha_{n-1}\;s^{n-1}+\ldots+\alpha_{1}\,s+\alpha_{0})\end{bmatrix}$$

Atendendo à relação (1), vem:

$$[sI-A]\cdot[sI-A]^{*}=\begin{bmatrix}\dfrac{s^{n}+\alpha_{n-1}\,s^{n-1}+\ldots+\alpha_{1}\,s+\alpha_{0}}{s^{n}+\alpha_{n-1}\,s^{n-1}+\ldots+\alpha_{1}\,s+\alpha_{0}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{s^{n}+\alpha_{n-1}\,s^{n-1}+\ldots+\alpha_{1}\,s+\alpha_{0}}{s^{n}+\alpha_{n-1}\,s^{n-1}+\ldots+\alpha_{1}\,s+\alpha_{0}}\end{bmatrix}=[I]$$

Atendendo a que, por definição

$$[sI-A]\cdot[sI-A]^{-1}=[I]$$

então

$$[sI-A]^{*}\equiv[sI-A]^{-1}$$

c. d. d.

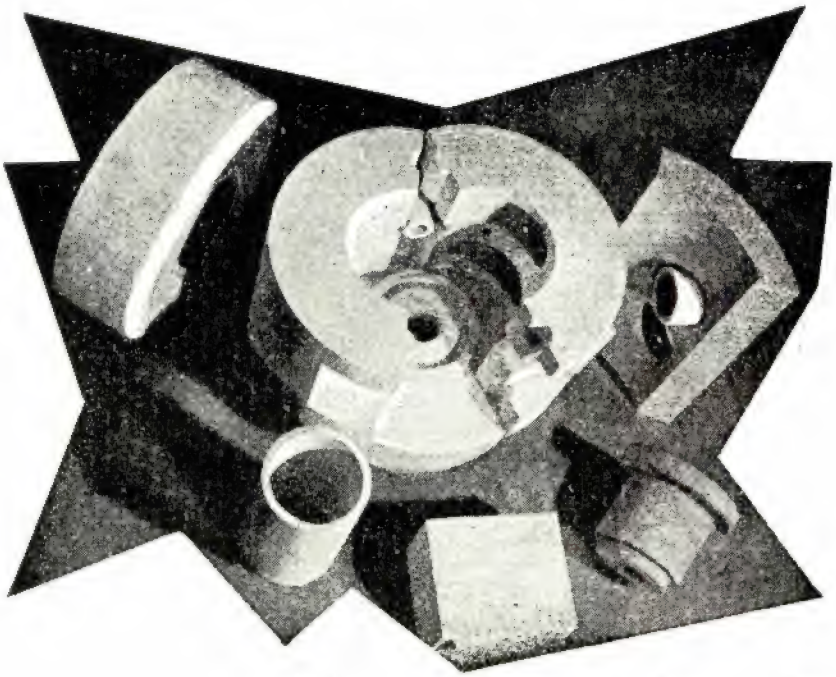
[1] **C. Limpen, E. Holmyard, A. R. Hall, T. S. William** — «*A History of Technology*», Oxford University Press, 1956.

[2] **D'Azzo, C. H. Houpis** — «*Feedback Control System Analysis & Synthesis*», Int. Student ed., 1966.

[3] **H. H. Rosenbrock** — «*Computer-Aided Control System Design*», Academic Press, 1974.

a técnica moderna emprega

BETÕES REFRACTÁRIOS



à base dos cimentos

FONDU LAFARGE

e

SECAR 250

porque são

práticos
eficientes
económicos

REFRACTÁRIOS ATÉ 1800° C

REFRACTÁRIOS ISOLANTES ATÉ 1700° C

Os nossos serviços técnicos, especializados, estão à vossa inteira disposição para estudar, sem qualquer encargo da vossa parte, a adaptação dos BETÕES REFRACTÁRIOS a todos os vossos problemas

AGUIAR & MELLO L.DA

P. do Municipio, 13-1.º — LISBOA — Tel. 32 11 51/2

Modelisation et stabilité de l'association onduleur de courant-machine asynchrone *

J. SANTANA
Centro de Automática da Universidade Técnica de Lisboa
Departamento de Comportamento de Sistemas (I. S. T.)

RESUMO

A associação ondulador de corrente-máquina assíncrona constitui um sistema para o qual as equações dos circuitos de contactos deslizantes são de aplicação imediata.

A complexidade do estudo da estabilidade do sistema leva-nos a introduzir hipóteses de simplificação que o tornam viável analiticamente. Desta maneira é possível considerar dois tipos de instabilidades: eléctricas e mecânicas.

A modificação dos parâmetros para assegurar a estabilidade de associação ondulador de corrente-máquina assincrona não pode ser vista como uma solução, porque assim se é conduzido a sistemas de baixo rendimento.

Com a introdução de cadeias de retroacção obtém-se sistemas estáveis sem modificar as boas performances da máquina assincrona. Os controlos da corrente contínua de alimentação e da frequência de escorregamento, com efeitos complementares, permitem eliminar os tipos de instabilidade considerados.

SUMMARY

This paper presents a dynamic model for the induction motor driven by current source inverter, which is developped as an application of the commutation circuits theory.

An analytical study of the system stability is possible with the introduction of simplifying hypothesis in the mathematical model. We will consider two types of instabilities: electrical and mechanical.

It is shown that the actions on the parameters to obtain the stability induce to systems with poor efficiency. The solution is the introduction of the feed-back loops.

The controls of the direct current and of the slip frequency with complementary effects leave out the two types of instabilities: the first one is equivalent to the increase of the stator resistance and so it is able to eliminate the electrical instability, the second one eliminates the steady instability bringing an electromechanical decrescent characteristics in the system.

1 — INTRODUCTION

L'introduction des éléments semiconducteurs de puissance dans le domaine de la conversion électromécanique d'energie a rendu possible régulation de vitesse de la machine asynchrone par variation statique de la fréquence d'alimentation. Les avantages de ce système face aux machines à courant continu résident dans la fiabilité et prix des machines d'induction à cage. Avec l'évolution du prix des dispositifs semiconducteurs de puissance, on prévoit que les machines à courant alternatif remplaceront les ensembles classiques dans les entrainement à vitesse variable.

Un des systèmes le plus souvent étudié actuellement est celui de l'association de l'onduleur de courant à la machine asynchrone. Le système résultant, se présente comme une machine à commutation électronique à laquelle il est possible d'appliquer la théorie des circuits à contacts glissants [1] [2]. Le modèle mathématique obtenu représente assez bien le comportement du système, qui s'écarte beaucoup du fonctionnement de la machine asynchrone classique.

Comme les équations decrivant le système sont non-linéaires, l'étude de la stabilité électromécanique se fait par linéarisation autour du point de fonctionnement, pour des petites perturbations [3], [4], [5]. Vu sa complexité l'étude analytique de la stabilité n'est pas possible, que si on introduit des hipothèses simplificatrices, classiques dans l'étude des machines électriques. De cette façon on vérifie qu'il est possible de considerer deux types d'instabilités: électrique et mécanique, et qu'on peut analyser les mécanismes qui les determinent. Des expressions simples, donnent des indications sur quels paramètres on doit agir pour obtenir des systèmes

* Travail fait en collaboration avec l'Unité FORT de l'Université de Louvain.

stables. Les conclusions ainsi obtenues sont en accord avec celles presentées pour l'étude de la stabilité globale, c'est-à-dire, sans hypothèses simplificatrices, faite par voie numérique dans la reférence **[5]**.

On vérifie que l'adaptation des paràmetres du système pour assurer qu'il soit stable dans toute la zone de fonctionnement moteur, conduit à de mauvais ensembles du point de vue du redement. C'est donc avec l'introduction de boucles de rétroaction qu'on obtient la stabilisation dans de bonnes conditions. À cause de leur importance, les effets des controles du courant continu d'alimentation et de la fréquence de glissement sont analysés. On observe qu'ils sont complémentaires du point de vue de la stabilité: tandis que le premier est équivalent à une augmentation de la resistance statorique et permet d'éliminer les instabilités électriques, l'imposition d'une fréquence de glissement constante donne à la caractéristique électromécanique un caractère de fonction monotone decroissante et elle lève les instabilités mécaniques.

2 — MODELISATION

La description du fonctionnement de l'association de l'onduleur de courant à la machine asynchrone peut se résumer comme suite: des signaux decalés entre eux de 60° et élaborés par le circuit de commande sont envoyés au gachettes des thyristors, de façon que chacun conduise pendant 120° dans chaque période. Le passage d'un thyristor aux thyristor adjacent se fait par le déclenchement de ce dernier puisque la configuration qu'on obtient avec cet amorçage fait appliquer au thyristor qui était en conduction une tension inverse fournie par les condensateurs placés dans le montage. Dans la figure 1, les thyristors A et F sont en conduction et les condensateurs sont chargés comme indiqué. Ainsi, quand on amorce B, la tension des condensateurs s'applique en inverse au thyristor A et provoque son blocage.

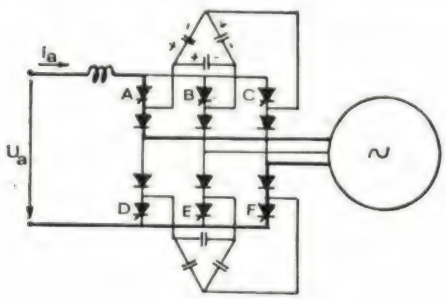


FIG. 1

La self extérieure qui lisse le courant continu et la présence des condensateurs qui assurent la commutation d'une phase à l'autre de façon presque instantanée, donnent au courants de phase de la machine la forme suivante:

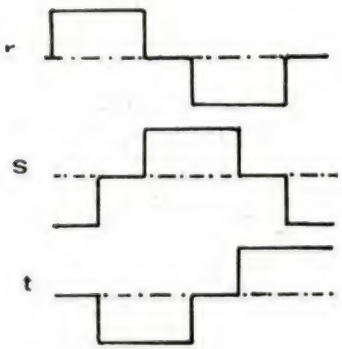


FIG. 2

Un équivalent mécanique du système est donné par la représentation de la FIG. 3, où nous avons les trois phases du stator liées à un collecteur mécanique sur lequel tournent des balais qui font un angle θ_s et l'enroulement (α ; β) qui tourne en faisant un angle θ_r par rapport à une position de réference.

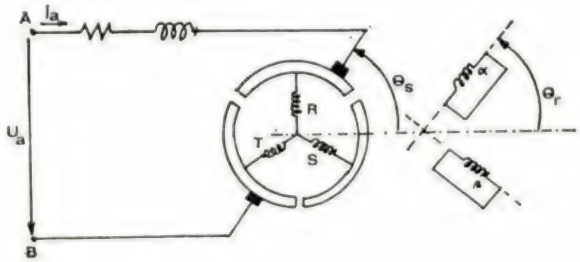


FIG. 3

Vu des terminaux A, B l'association onduleur de courant-machine asynchrone se présente comme une machine à commutation à laquelle il est possible d'appliquer la théorie des circuits à contacts glissants. Il est interessant de noter qu'en 1968 dans la réference **[6]** on fait déjà l'étude théorique du regime permanent pour un système semblable à celui de la FIG. 3.

La condition rigoureuse d'applicabilité de la théorie des circuit du type à contacts glissants est d'avoir un nombre infini de branchements à commuter de façon discontinue. En vérifiant que le transfert d'une phase à l'autre se fait de façon presque instantanée et que la correction non-lineique **[7]** due au nombre fini de branchements (six) n'apporte guère des modifications, on peut dire que se système est une illustration directe de l'application des équations des circuits à contacts glissants.

Les équations de l'association onduleur de courant--machine asynchrone sont:

$$U_a = R_a\, i_a + \frac{d\psi_a}{dt} + \frac{0-\dot{\theta}_s}{i_a}\,\frac{\partial}{\partial\theta_s}\,W_m \qquad (1)$$

$$\dot{\theta}_s.\,(t) = \frac{d}{dt}\,\theta_s \qquad (2)$$

$$O = R_\alpha \cdot i_\alpha + \frac{d\psi_\alpha}{dt} \quad (3)$$

$$O = R_\beta \cdot i_\beta + \frac{d\psi_\beta}{dt} \quad (4)$$

$$T_e - T_L = J \frac{d\dot{\theta}_r}{dt} + D \cdot \dot{\theta}_r \quad (5)$$

(1) est l'équation du circuit du stator qui est du type de circuit à contacts glissants. L'équation (2) donne la position des balais, definie par la logique de commande de l'onduleur. (3) et (4) sont les équations du rotor. (5) traduit la dynamique de la machine avec la charge.

Dans ce modèle mathématique les variables i_α et i_β (courants du rotor) ne sont pas constantes en régime permanent. Aussi on change la representation des grandeurs du rotor où l'enroulement biphasé. (α, β) sera remplacé par un autre placé dans un referentiel qui tourne avec les balais du stator.

De cette façon on obtient des systèmes d'équations dans lesquels les variables sont constantes en regime permanent, ceci étant important, en particulier dans l'étude de la stabilité quand on fait la linéarisation autour d'un point de fonctionnement.

Les équations du systèmes, aprés la transformation (α, β) $\rightarrow$ (d, q) des grandeurs du rotor, sont:

$$\begin{pmatrix} U_a \\ O \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_a + L_a p & M p & \dot{\theta}_s M \\ M p & R_r + L_r p & \dot{\theta}_{sr} L_r \\ -\dot{\theta}_{sr} M & -\dot{\theta}_{sr} L_r & R_r + L_r p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$(U) = (Z)\,(i)$$

$$\dot{\theta}_s(t) = \frac{d}{dt}\,\theta_s \quad (2)$$

$$T_e - T_L = J \frac{d\dot{\theta}_r}{dt} + D\,\dot{\theta}_r \quad \text{avec} \quad T_e = M\, i_a\, i_{qr} \quad (7)$$

$$\text{où} \quad \dot{\theta}_{sr} = \dot{\theta}_s - \dot{\theta}_r$$

Un autre modèle où les grandeurs du rotor sont constantes est obtenu en assimilant la force magnéto-motrice du rotor, exprimée dans les axes dq à une f. m. m. $n\, i_r$ avec une position γ par rapport à la ligne des balais du stator.

Les équations obtenues avec cette transformation sont:

$$U_a = R_a\, i_a + L_a \frac{d\, i_a}{dt} + M \cos\gamma \frac{d\, i_r}{dt} + (\dot{\theta}_s - \dot{\gamma})\, M \sin\gamma\, i_r \quad (8)$$

$$O = M \cos\gamma \frac{d\, i_a}{dt} + R_r\, i_r + L_r \frac{d\, i_r}{dt} - \dot{\theta}_{sr}\, M \sin\gamma\, i_a \quad (9)$$

$$O = M \sin\gamma \frac{d\, i_a}{dt} + \dot{\theta}_{sr}\, M \cos\gamma\, i_a + (\dot{\theta}_{sr} - \gamma)\, L_r\, i_a \quad (10)$$

L'équation de l'équilibre mécanique est bien sur la même dans tous les modèles. Dans ce cas, le couple électromagnétique est donné par l'expression:

$$Te = M\, i_a\, i_r \sin\gamma \quad (11)$$

Il est interessant de voir la similitude de ces équations et de celles qui décrivent la génératrice à redresseur **[7]**.

(8) est l'équation de l'inducteur, que peut être presentée sous la forme suivante:

$$U_a - \dot{\theta}_s\, M \sin\gamma\, i_r = R_a\, i_a + L_a \frac{d\, i_a}{dt} + M \cos\gamma \frac{d\, i_r}{dt} - \dot{\gamma}\, M \sin\gamma\, i_r \quad (12)$$

C'est-à-dire, que la tension appliquée à l'inducteur de la génératrice équivalente à notre système, premier membre de l'équation, est le résultat d'une boucle de retroaction du à la force contre-électromotrice

$-\dot{\theta}_s\, M\, i_r \sin\gamma$ sur la tension appliquée

(9) est l'équation de l'induit de la génératrice équivalente, celle-ci tournant avec une vitesse $\dot{\theta}_{sr}$ et étant mise en court-circuit, puisque le premier membre de l'équations est égal à zéro.

(10) est l'équation qui nous donne la position des balais de la génératrice (appelée équation électromécanique).

L'equivalence qui vient d'être décrite est presentée sous une forme graphique à la FIG. 4.

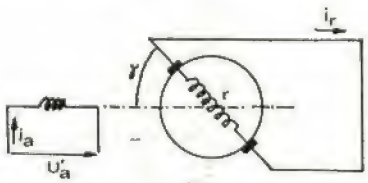


FIG. 4

A de petites différences près le deuxième modèle mathématique developpé est identique à celui présenté aux réferences **[3]** et **[4]**. Cependant comme il est déduit d'une struture mathématique d'application générale aux machines à commutation, son établissement ne depend pas de la forme de la loi de variation des inductances mutuelles stator-rotor, contrairement aux modèles developpés à partir de la transformation de Park où il faut admettre que cette loi est du type cosinusoidale. Aussi

ce modèle pourra être généralisé à d'autres machines, par exemple de grand nombre de phases où l'hypothèse de variation cosinusoidale de la mutuelle n'est pas acceptable.

3 — STABILITÉ

Les problèmes de stabilité de l'association onduleur de courant-machine asynchrone en boucle ouverte constituent une des principales limitations à son utilisation.

Dans la mesure où les équations du système sont non-linéaires, l'étude de la stabilité electromécanique se fait par linéarisation, autour du point de fonctionnement, pour de petites perturbations. Une étude globale, qui est faite par une voie ordinateur dans la reférence **[5]**, se revèle impossible de façon analytique. Cependant, si on fait des hypothèses simplificatrices, on arrive à des structures plus faciles à traiter.

3.1 — Stabiblité electrique

Si on suppose constante la vitesse du rotor, l'influence de la partie mécanique sur la stabilité du système disparait, ce qui nous reduit l'analyse au «Calcul de la Stabilité Electrique». De cette façon l'étude se réduit à l'analyse de l'équation (6) avec $\dot{\theta}_r$ constant. Elle peut se présenter sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} U_a \\ O \\ O \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\theta}_s M i_{qr} \\ O \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_a + L_a p & M p & O \\ M p & R_r + L_r p & -\dot{\theta}_{sr} L_r \\ -\dot{\theta}_{sr} M & -\dot{\theta}_{sr} L_r & R_r + L_r p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{pmatrix} \tag{13}$$

ou

$$(U'_a \; O \; O)^t = (Z_1)\,(i_a \; i_{dr} \; i_{dr})^t \tag{14}$$

où

$$U'_a = U_a - \dot{\theta}_s M i_{qr}$$

Le schéma-bloc correspondant est:

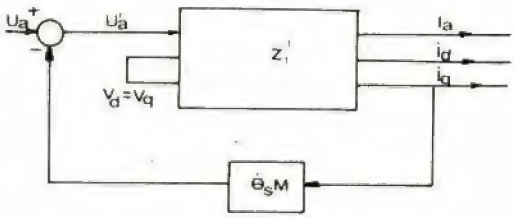


FIG. 5

Une analogie entre ce système avec un alternateur en court-circuit, à tension d'excitation controlée, est établie à partir de l'équation (13). En effet, cette équation peut être vue comme l'équation d'un alternateur, qui tourne avec la vitesse $\dot{\theta}_{sr}$, et où les enroulements (d q) d'induit sont en court-circuit. La tension d'excitation U'_a est le résultat de la tension continue U_a et de la chaine de retroaction, qui donne une tension $-\dot{\theta}_s M i_{qr}$, c'est-à--dire, on remplace le circuit statorique, par un circuit du type filiforme où le terme de glissement apparait comme un effet de retroaction.

Avec l'hypothèse d'une vitesse du rotor constante, l'alternateur en court-circuit est toujours stable, des lors la fonction de transfert i_{qr}/U'_a présente ses pôles dans le demi-plan de gauche. Aussi on peut dire que les instabilité electriques ont pour origine l'action de la boucle de retroaction. Les FIGS. 6 a, b répresentent la localisation des pôles sans et avec rétroaction pour différentes valeurs du glissement.

Comme on le voit les pôles de l'alternateur en c. c. se trouvent dans le demi-plan de gauche FIG. 6 a), mais quand on «ferme» la chaine de retroaction, on a un déplacement des pôles $\beta \pm j\gamma$ vers la droite, FIG 6 b), ce qui peut conduire le système à l'instabilité, pour un certain domaine de valeurs du glissements.

La stabilité du système est d'autant mieu garantie que les pôles en boucle ouverte soient le plus possible à gauche et que l'action du gain en boucle fermée soit la plus faible possible. On montre que la somme des parties réelles des pôles en boucle ouverte et que le gain sont donnés par les expressions suivantes:

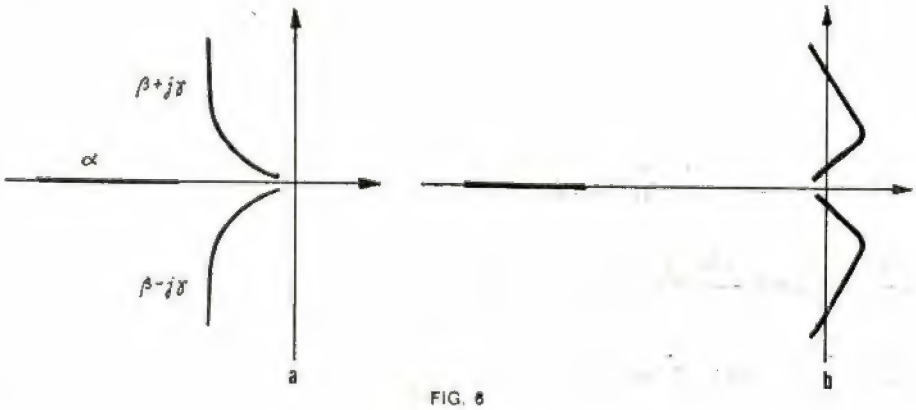


FIG. 6

$$\alpha+2\beta=-\frac{R_a}{L'_a}-2\frac{R_r}{L'_r}+K^2\frac{R_r}{L'_r} \qquad (15)$$

$$K_E=s\,(\dot{\theta}_s K)^2\,.\,\frac{R_r}{L'_r} \qquad (16)$$

où

$$L'_r=\sigma L_r \qquad L'_a=\sigma L_a$$

$$\sigma=1-K^2=1-\frac{M^2}{L_a L_r}$$

Ces expressions constituent des «mesures» de la stabilité puisqu'elle donnent des indications sur les paramètres sur lesqueles on doit agir pour obtenir des systèmes stables.

La FIG. 7 donne la localisation des pôles en boucle fermée pour différentes valeurs de la résistance statorique (par simplification sont presentés uniquement ceux qui peuvent se déplacer vers le demi-plan de droite).

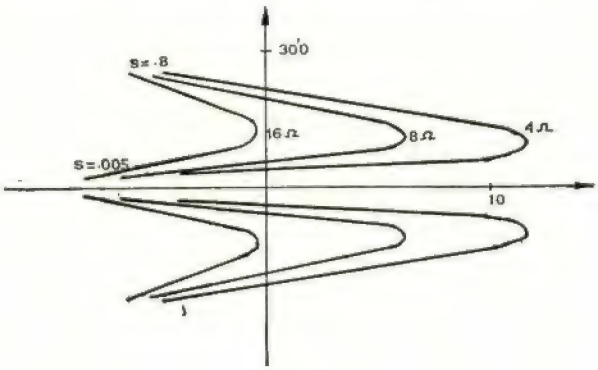


FIG. 7

Une augmentation de la résistance statorique est favorable du point de vue de la stabilité, elle fait augmenter $|\alpha+2\beta|$.

La FIG. 8 donne la localisation des pôles en boucle fermée pour de différentes valeurs de la fréquence statorique (sont presentés uniquement les pôles $\beta \pm j\gamma$ par simplification).

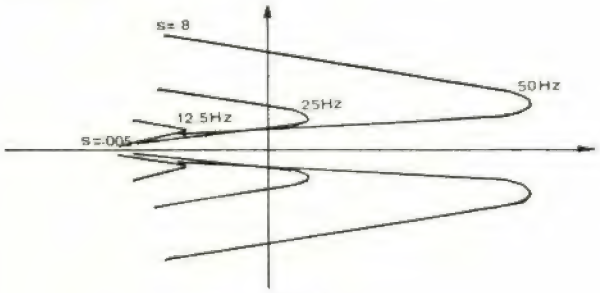


FIG. 8

La diminution de la fréquence statorique a une action favorable sur la stabilité du système. Puisque dans la définition du gain K_E, la fréquence apparait associé au coefficient de couplage K, la conclusion tirée de la figure precédente est aussi valable pour la variation de celui-ci.

3.2 — Stabilité mécanique

L'autre hypothèse qu'on fait, néglige les variations de flux dans l'équation (6) ce qui conduit au calcul dit «Calcul de la Stabilité Mécanique». Dans ce cas, l'étude de la stabilité du système se réduit à l'analyse du schème-bloc de la figure suivante.

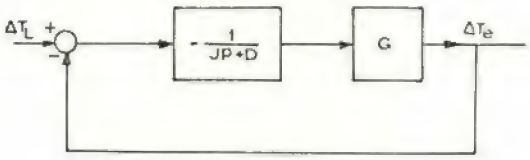


FIG. 9

où $G=\dfrac{\Delta T_e}{\Delta \dot{\theta}_r}$ est la pente de la caractéristique électromécanique.

La condition de stabilité mécanique est donnée par:

$$G-D \leqslant O \qquad (17)$$

qui est la condition connue de stabilité quand on analyse les regimes transitoires avec les équations du regime permanent électrique.

L'éxpression du couple électromagnétique est donnée par:

$$T_e=\frac{\dot{\theta}_{sr} M^2 R_r}{R_r^2+\dot{\theta}_{sr}^2 L_r^2}\cdot\frac{U_a^2}{\left[R_a+\dfrac{\dot{\theta}_{sr}\dot{\theta}_s M^2 R_r}{R_r+\dot{\theta}_{sr}^2 L_r^2}\right]^2} \qquad (18)$$

Aussi la forme de la caractéristique électromécanique dépend du fait que la condition $(M^2\dot{\theta}_s)/(L_r R_a) < 2$ soit verifiée (FIG. 10 b) ou non (FIG. 10 a).

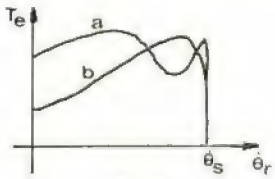


FIG. 10

Quand le système présente la caractéristique électromécanique de la forme b) et quand on a $L_a/R_a \simeq L_r/R_r$, on peut montrer que le système est stable electriquement dans tout le domaine du fonctionnement en moteur. On remarque que les paramètres qui determinant la stabilité électrique sont les mêmes que ceux qui déterminent la forme de la carateristique électromécanique.

3.3 — Stabilité electromécanique

Comme indiqué la complexité du calcul de la stabilité électromécanique ne permet pas qu'il soit fait analytiquement. Cependant, sous certaines conditions, ce comportement peut être prévu à partir des études partielles des paragraphes (3.1) et (3.2).

La méthode de linéarisation autour du point de fonctionnement pour de petites perturbations permet d'établir toutes les fonctions de transfert du système. En particulier, la fonction $\Delta T_e / \Delta T_L$ est très utilisée pour l'étude de la stabilité du système. Si on néglige le coefficient de frottement (D = O), elle est representé par le schéme-bolc suivant:

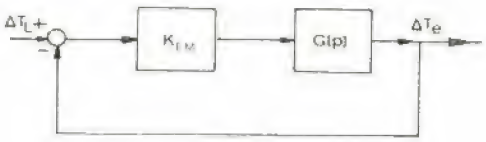


FIG. 11

où

$$K_{EM} = M^2 (R_r/L_r) \cdot (R_r^2 + \sigma \dot{\theta}_{sr}^2 L_r^2) \cdot \frac{U_a^2}{J} \qquad (19)$$

$$G(p) = \frac{p^3 + a_2/a_1\, p^2 + a_3/a_1}{p\,(p^3 + d_2/d_1\, p^2 + d_3/d_1\, p + d_4/d_1)} \qquad (20)$$

avec

$$d_1 = \sigma L_a L_r^2$$

$$d_2 = R_a L_r^2 + R_r L_a L_r + R_r L_a L_r \sigma$$

$$d_3 = 2 R_a R_r L_r + R_r^2 L_a + \dot{\theta}_{sr}^2 L_r^2 L_a \sigma$$

$$d_4 = R_a R_r^2 + R_r \dot{\theta}_{sr} \dot{\theta}_s M^2 + \dot{\theta}_{sr}^2 R_a L_r^2$$

et

$$a_1 = [-L_a L_r M^2 R_r^2 (\sigma R_r^2 + \dot{\theta}_{sr}^2 L_r^2)]\, (U_a/\Delta Z_o)^2$$

$$a_2 = [\dot{\theta}_s \dot{\theta}_{sr} L_r M\ R_r (1 - 3\,S) + \sigma \theta_{sr}^4 L_r^4 L_a M^2 R_r -$$

$$- R_r^2 M^2 (R_a R_r^2 L_r + \dot{\theta}_{sr}^2 L_r^2 R_a + R_r^3 L_a)]\, (U_a/\Delta Z_o)^2$$

$$a_3 = G \cdot \Delta Z_o$$

G est la pente de la caractéristique électromécanique du schéma-bloc de la FIG. 9 et ΔZ_o est donné par l'expression:

$$\Delta Z_o = R_a R_r^2 + \dot{\theta}_{sr} \dot{\theta}_s M^2 R_r + \dot{\theta}_{sr}^2 L_r^2 R_a$$

Pour toute valeur du glissement, on connait la localisation des pôles de la fonction $\Delta T_c / \Delta T_L$ en boucle ouverte, c'est-à-dire, de la fonction G (p), dont le dominateur est le produit de p par le polynôme caractéristique de la matrice (Z) (équation 6).

Le pôle à l'origine est du à la prise en considération de la charge mécanique du système, tandis que les autres sont ceux étudiés dans le calcul de la stabilité électrique au paragraphe 3.1.

Pour $K_{EM} \simeq 0$, ce qu'on vérifie pour $J \simeq \infty$ ou $U_a \simeq 0$, l'étude de la stabilité electromécanique coincide avec celle réalisée en (3.1.).

Pour $K_{EM} \neq 0$, en plus de la connaissance des pôles en boucle ouverte, on doit connaitre la localisation des zéros de la fonction $\Delta T_e / \Delta T_L$. Ceux-ci sont les racines de l'équation

$$a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0 \qquad (21)$$

Comme le signe de a_1 est négatif, quand $a_3 > 0$ quel que soit le signe de a_2, nous aurons deux zéros réels, dont un est positif, FIG. 12.

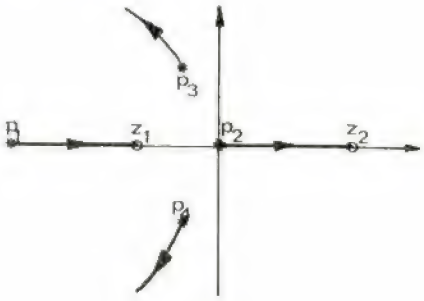


FIG. 12

De cette façon, pour une valeur donnée du glissement, quand $U_a^2/J \rightarrow \infty$ le pôle p_2 se déplace vers le zéro Z_2 et le système devient instable. Mais $a_3 > 0$ signifie que $G > 0$ et alors on peut conclure que l'instabilité mécanique détermine l'instabilité électromécanique.

On vérifie que le signe de a_2, sauf quand on est très proche de la vitesse de synchronisme, est positif. Dans cette condition et avec $a_1 < 0$ et $a_3 < 0$, les racines de l'équation (21) sont conjuguées avec partie réelle positive. En supposant que le système est stable électriquement pour une valeur donnée du glissement, quand $U_a^2/J \rightarrow \infty$, on aura la localisation des pôles presentée à la FIG. 13.

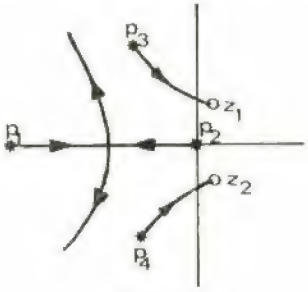


FIG. 13

On voit que si le système est stable electriquement, alors il y a un domaine de U_a^2/J dans lequel il l'est aussi electromécaniquement. On montre que l'importance de ce domaine est tel qu'on peut dire que la stabilité electrique determine la stabilité électromécanique, quand $a_3 < 0$.

4.1 — Stabilisation du système

Pour la stabilisation de l'association onduleur de courant-machine asynchrone deux solutions se presentent:

a) Modification des paramètres
b) Introduction des boucles de rétroaction

L'alternative a) conduit à des systèmes assez mauvais du point de vue de rendement. En effet comme indiqué en (3.1), les paramètres dont les variations conduisent à la stabilité electrique, soient la résistance R_a et le coefficient de couplage K, doivent prendre des valeurs qui, comme on peut le voir dans les FIG. 7, e 8, font augmenter beaucoup les pertes du système. De cette façon, l'introduction des boucles de retroaction est la solution qu'on recommande et c'est dans cette direction que les recherches trouvées dans la littérature se sont orientées.

On va présenter deux contrôles, qui ayant des effets complémentaires, lèvent les deux types d'instabilités trouvées dans le système.

4.2 — Effet du contrôle du courant continu sur la stabilité

On agit sur la commande du redresseur, FIG. 14, de façon que le courant continu, i_a, soit constant.

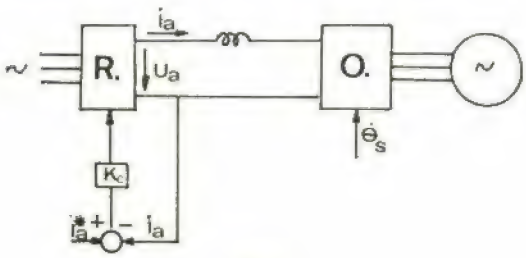


FIG. 14

En donnant à l'alimentation un caractère de source de courant cette régulation a une action très favorable pour la stabilisation du système. Aussi on trouve dans certains articles l'inclusion de ce controle dans la structure de l'association onduleur de courant-machine asynchrone **[9], [10], [11]**.

Pour montrer l'influence du controle du courant i_a sur la stabilité, on considère la vitesse du rotor constante. Dans ce cas l'analyse du système se réduit à l'équation (6) plus la relation suivant:

$$U_a = K_c\,(I_a^* - i_a) \tag{22}$$

qui traduit l'action d'une boucle de régulation du type proportionnel. Ainsi, on remplace la variable d'entrée U_a par le courant de reférence I_a^*.

La stabilité électrique de ce système est connue par l'analyse de l'équation suivante:

$$\begin{pmatrix} K_c I_a^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_a+K_c)+L_a p & M p & \dot{\theta}_s M \\ M p & R_r+L_r p & \dot{\theta}_{sr} L_r \\ -\dot{\theta}_{sr} M & -\dot{\theta}_{sr} L_r & R_r+L_r p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{pmatrix} \tag{23}$$

Comme on le voit, l'effet de ce contrôle se traduit par une augmentation apparente de la résistance du stator. Ainsi, il se présente favorable du point de vue de la stabilité. En augmentant la valeur de K_c on peut lever les instabilités électriques.

4.3 — Effet du contrôle de la fréquence de glissement, $\dot{\theta}_{sr}$, sur la stabilité

On aditionne ou signal de la vitesse instantanée du rotor, $\dot{\theta}_r$, la valeur de la fréquence rotorique ou de glissement, $\dot{\theta}_{sr}^*$, qu'on veut et on obtient ainsi la valeur de la fréquence de commande de l'onduleur, c'est-à-dire, la fréquence statorique.

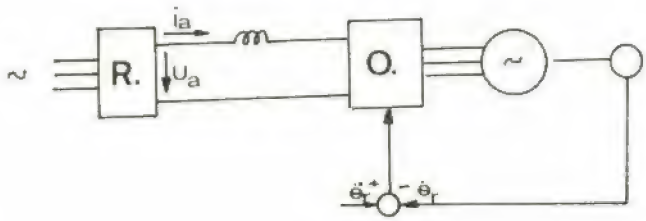


FIG. 15

L'action de ce contrôle se revèle importante du point de la stabilité mécanique. En effet avec ce contrôle, la stabilité mécanique du système présenté à la FIG. 15 est toujours garantie puisque qu'elle conduit a un gain $G < 0$ dans le schème-bloc de la FIG. 9.

On remarque que G répresente la pente de la caractéristique électromécanique. Le couple électromagnétique est donné par:

$$T_e = A\,I_a^2 = \frac{A \cdot U_a^2}{(R_a + A\,\dot{\theta}_s)^2} \tag{24}$$

avec

$$A = \frac{\theta_{sr}\,M^2\,R_r}{\Delta\,Z_o}$$

Sa representation graphique est:

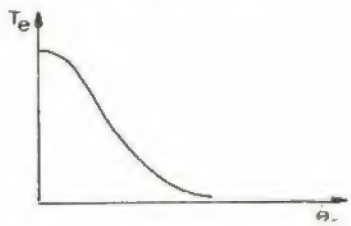


FIG. 16

Le système présente une caractéristique électromécanique assez semblable à celle de la machine c. c. type série et n'a pas de problèmes d'instabiblité mécanique.

5 — CONCLUSIONS

L'association onduleur de courant-machine asynchrone constitue un système où les équations des circuits à contacts glissants sont d'application directe.

Les hypothèses faites pour rendre possible l'étude analytique de la stabilité présentent des avantages. D'abord on voit qu'il y a deux origines pour les instabilités trouvés dans le système, et on obtient des indications utiles pour l'obtention des systèmes stables.

La modification des paramètres du système pour assurer la stabilité electrique conduit à de mauvaises solutions du point de vue du rendement, donc la voie qui reste est l'introduction de boucle de retroaction. Les contrôles du courant continu et de la fréquence de glissement, avec des actions complementaires, conduisent à la stabilité du système, puisque si le premier élimine les instabilités electriques, le second fait disparaître les instabilités mécaniques.

[1] **Manuel Garrido** — *Les liaisons internes des machines electriques à commutation.* Técnica n.º 368, Maio 1967.

[2] **M. Garrido** — *Les équations générales des machines electriques déduites de l'electromagnétisme.* Revue E, Vol. 8, 1971.

[3] **N. Sawayi** and **N. Sato** — *Steady-state and stability analysis of induction motor driven by corrent source inverter.* I.E.E.E. — Transactions on Industry Applications, Vol. IA — 13 n.º 3, May/June 1977.

[4] **E. Cornell** and **T. Lipo** — *Modeling and design of controlled current induction motor driven systems.* I. E. E. E. — Transactions on Industry Applications. Vol. IA — 13, n.º 4, July/August 1977.

[5] **N. Sato, M. Ishida** and **N. Sawaki** — *Some characteristics of induction motor driven by current source inverter.* I. E. E. E./I. A. S. Semiconductor Power Converter Conference, 1977.

[6] **E. Gudefin** — *Les machines à commutation electronique.* Revue Générale de L'Electricité n.º 1, Janvier 1968.

[7] **M. Garrido** — *Équations de la génératrice à redresseur. Étude du régime permanent.* Revue E, Vol. VII n.º 3, 1972.

[8] **E. Cornell** and **T. Lipo** — *Design of controlled current a. c. drive using transfert function techniques.* Conference Record of I. F. A. C., Symposium on Control in Power Electronics and Electrical Drives, Dusseldorf, October 1974.

[9] **B. Trannoy, M. Boidin** and **B. de Fornel** — *Investigation of the transient behaviour of a current-fed autopiloted asynchronous induction machine.* PROC. I. E. E. Vol. 122 n.º 10, October 1975.

[10] **B. de Fornel** and **D. Noyes** — *Transient characteristic of an asynchronous machine fed from a static converter.* PROC. I. E. E. Vol. 124 n.º 10, October 1977.

[11] **T. Lipo** and **E. Cornell** — *State-variable steady-state analysis in a controlled current induction motor drive.* I. E. E. E. — Transactions on Industry Applications. Vol. IA — 11 n.º 8, November/December 1975.

Étude analytique et application des équations variationnelles de la génératrice à redresseur

M. S. GARRIDO
Centro de Automática da Universidade Técnica de Lisboa
Faculté de Sciences Appliquées de Louvain-la-Neuve

RESUMO

São introduzidas as principais constantes de tempo que intervêm no funcionamento variacional dos geradores de rectificação e justificados vários niveis possiveis de simplificação. Os resultados obtidos são aplicados ao estudo da função de transferência das excitatrizes sem escovas e ao estudo da estabilidade do motor de indução alimentado por ondulador de corrente.

SUMMARY

This paper introduces the main time constants that influence the small signal behaviour of the rectified output AC generators and presents some reasonable simplifications. The results so obtained are used to study the transfert function of the brushless exciter and to study the stability of the induction motor driven by current source inverter.

1 — INTRODUCTION

Les équations de la génératrice à courant alternatif suivie d'un redresseur à diodes, que nous appellerons génératrice à redresseur, sont aujourd'hui bien connues. Elles ont fait l'objet d'un certain nombre d'études, soit dans le cas général des machines polyphasées, à pôles saillants, en polygone ou en étoile, avec redressement simple ou en pont, à coupplage sinusoïdal ou non **[1]**, **[2]**, soit dans le cas particulier d'une machine triphasée, à poles lisses, avec couplage sinsoïdal et redressement en pont **[3]**.

Ce cas particulier présente l'intéret théorique de mettre en évidence, d'une façon simple, les principales proprietés de ce type de systèmes et il est important en pratique parce-que beaucoup de réalisations utilisent, effectivement, des machines triphasées, à poles lisses, avec redressement en pont.

Ce sera, par exemple, le cas de beaucoup d'excitatrices à diodes tournantes et encore, bien qu'indirectement (nous le verrons plus loin), le cas des moteurs à induction alimentés par un onduleur de courant.

Pour l'étude de problèmes de stabilité ou de régulation faisant intervenir ces systèmes il est donc utile d'établir les équations de petits signaux ou équations variationnelles de la génératrice triphasée, à poles lisses, suivie d'un pont redresseur.

Ces équations ont déjà été écrites et confirmées experimentalment en vue de son application aux excitatrices. On a ainsi constaté que, pour les transitoires purement électriques, on obtient un système du trosième ordre **[4]**, **[5]**, mais qu'il est raisonnable d'utiliser, pour la plupart des applications comme excitatrice, un modèle simplifié du second ordre ou même du primier ordre **[6]**, **[7]**.

Dans les travaux précedents, les modèles simplifiés ont été obtenus soit par des considérations à priori (négliger des termes $d\psi/dt$) soit par des considérations à posteriori (critère des pôles dominants).

Dans le présent travail, nous écrivons les équations de façon à justifier les simplifications possibles, dont certaines n'avaient pas été considerées auparavant. Pour cela, nous mettrons en évidence un certain nombre de constantes de temps caractéristiques du système et leur rôle aux différents niveaux d'approximation.

En vue d'applications plus générales, nous ajouterons aussi l'équation mécanique du système.

Les résultats obtenus seront ensuite appliqués à deux cas importantes en pratique.

Le premier sera le cas classique de l'excitatrice à diodes tournantes, où on établira un schéma-bloc simple du système.

Le deuxième cas, sera le moteur à induction alimenté par onduleur de courant, où on étudiera les problèmes de stabilité, qui difficultent l'utilisation de ce système d'entraînement à vitesse variable.

2 — ÉQUATIONS VARIATIONNELLES DE LA GÉNÉRATRICE À REDRESSEUR SUR CHARGE INDUTIVE

Considérons une génératrice triphasée, à pôles lisses, avec couplage sinusoïdal, suivie d'un pont redresseur et alimentant un circuit inductif de paramètres R_c, L_c.

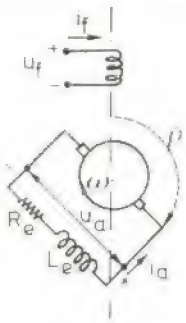


FIG. 1

Schéma de la génératrice à redresseur

Un tel système peut être assimilé, avec une bonne approximation [3], à une machine à courant continu, dont les balais sont mobiles en fonction de la charge, comme representé a la figure 1.

Compte tenu de l'analogie du système avec une machine à courant continu, nous utiliserons, par la suite, les notations propres à ces machines, plutôt que celles habituelles pour les machines synchrones triphasées.

L'équation du circuit inducteur est l'équation classique d'un circuit filiforme

$$u_f = R_f\, i_f + \frac{d\,\psi_f}{d\,t} \qquad (1)$$

où ψ_f est le flux couplé avec l'inducteur.

Pour le circuit induit nous avons besoin de deux équations: l'une qui est l'équation éléctrique du circuit à commutation *a* e l'autre qui donne la position ρ des balais.

L'équation du circuit à commutation est, en négligeant la resistance interne du circuit ou en la supposant inclue dans la resistance de charge R_c:

$$u_a = \frac{d\,\psi_a}{d\,t} + \frac{\omega - \dot{\rho}}{i_a}\,\frac{\partial\, W_{cm}}{\partial\,\rho} \qquad (2)$$

où W_{cm} est la coénergie magnétique du système; ψ_a est le flux couplé avec le circuit induit; et $u_a = -R_c\, i_a - L_c \dfrac{d\, i_a}{d\,t}$ est la tension aux terminaux du circuit à commutation.

Dans le cas du redresseur à diodes, l'équation de position des balais est donnée par la condition: la tension u_a entre les balais est plus élevées que la tension u'_a entre une autre paire de balais imaginée à n'importe quelle position ρ'. Il en résulte, par application de l'équation (2) à la paire de balais imaginée à la position ρ':

$$0 = \left[\frac{\partial}{\partial\,\rho'}\left(\frac{d\psi_a}{d\,t} + (\omega - \dot{\rho}')\,\frac{\partial\,\psi'_a}{\partial\,\rho'}\right)\right]_{\rho'=\rho} \qquad (3)$$

où (') concerne les variables du circuit imaginé à la position ρ' et où on a tenu compte du fait que

$$\lim_{i'_a \to 0} \frac{\partial\, W_{cm}}{\partial\,\rho'} = i'_a\,\frac{\partial\,\psi'_a}{\partial\,\rho}.$$

Aux équations d'induit (2) et (3) on devrait ajouter les conditions d'irreversibilité du pont de diodes $u_a \geqslant 0$, $i_a \leqslant 0$, mais ces conditions ne vont pas intervenir dans l'analyse de petits signaux à faire par la suite.

Finalement, on écrira encore l'équation mécanique du rotor à commutation, qui est, en négligeant le frottement:

$$C = J\,\frac{d\,\omega}{d\,t} - \frac{\partial\, W_{cm}}{\partial\,\rho} \qquad (4)$$

où J represente le moment d'inertie et C le couple appliqué.

La validité du système d'equations (1) à (4) a été confirmée experimentalement dans d'autres travaux, y compris en régime variationnel.

C'est pourquoi dans le présent travail nous les prendrons comme équations de départ, sans plus de soucis pour montrer leur validité et nous bornerons à les transformer ou simplifier en vue de leur utilisation dans l'étude de certains problèmes pratiques qui nous interessent.

Introduisons les selfs L_a, L_f et la mutuelle inducteur/ /induit $M = -M_o \cos\rho$.

Le flux couplé avec le circuit induit est donné par $\psi_a = L_a\, i_a - M_o \cos\rho\, i_f$ et le flux couplé avec un circuit identique en quadrature $(\rho_q = \rho + \dfrac{\pi}{2})$ est donné par $\psi_{aq} = M_o \sin\rho\, i_f$.

Nous allons utiliser ψ_{aq} comme variable auxiliaire et profiter du fait que, pour les couplages sinusoïdaux et aux fuites homopolaires près, on a:

$$\frac{\partial\,\psi'_a}{\partial\,\rho'} = \psi'_{aq}; \qquad \frac{\partial\,\psi'}{\partial\,\rho'} = -\psi'_a; \qquad \frac{\partial\, W_{cm}}{\partial\,\rho} = i_a\,\psi_{aq} \qquad (5)$$

où le symbol (') concerne toujours la paire de balais à la position ρ'.

L'ensemble d'équations (1) à (4) devient alors:

$$u_f = R_f\, i_f + \frac{d\,\psi_f}{d\,t} \qquad (6\text{-a})$$

$$u_a = \frac{d\,\psi_a}{d\,t} + (\omega - \dot{\rho})\,\psi_{aq} \qquad (6\text{-b})$$

$$0 = \frac{d\,\psi_{aq}}{d\,t} - (\omega - \dot{\rho})\,\psi_a \qquad (6\text{-c})$$

$$C = J\,\frac{d\,\omega}{d\,t} - i_a\,\psi_{aq} \qquad (6\text{-d})$$

Nous allons maintenant écrire les équations variationnelles, en linéarisant les équations precédentes pour des petites variations autour d'un état d'équilibre quelconque, défini par:

$$u_{fo} = R_f\, i_{fo} \qquad (7\text{-a})$$

$$u_{ao} = \omega_o\,\psi_{aqo} \qquad (7\text{-b})$$

$$0 = \psi_{ao} \qquad (7\text{-c})$$

$$C_o = -i_{ao}\,\psi_{aqo} \qquad (7\text{-d})$$

On obtient, sans difficulté, les équations

$$\Delta u_f = R_f \Delta i_f + p \Delta \psi_f \quad (8\text{-a})$$

$$\Delta u_a = p \Delta \psi_a + \omega_o \Delta \psi_{aq} + \psi_{aqo} \Delta \omega - \psi_{aqo} p \Delta \rho \quad (8\text{-b})$$

$$O = p \Delta \psi_{aq} - \omega_o \Delta \psi_a \quad (8\text{-c})$$

$$\Delta C = J p \Delta \omega - i_a \Delta \psi_{aq} - \psi_{aqo} \Delta i_a \quad (8\text{-d})$$

où on a fait $p = \dfrac{d}{dt}$.

Nous allons réduire les variables par rapport à l'état d'équilibre du système, en utilisant comme grandeurs de base les suivantes:

$$u_{fo},\ i_{fo},\ L_f i_{fo},\ i_{ao},\ u_{ao},\ \psi_{aqo},\ \omega_o,\ \omega_o t,\ C_o \quad (9)$$

Si, en plus, nous utilisons l'équation (8-c) por éliminer $\Delta \psi_a$ en fonction de $\Delta \psi_{aq}$, de système d'équations (8) se réduit à:

$$\Delta u_f^* = \Delta i_f^* + T_f p^* \Delta \psi_f^* \quad (10\text{-a})$$

$$\Delta u_a^* = (1 + p^{*2}) \Delta \psi_{aq}^* + \Delta \omega^* - p^* \Delta \rho \quad (10\text{-b})$$

$$\Delta C^* = J^* p^* \Delta \omega^* + \Delta \psi_{aq}^* + \Delta i_a^* \quad (10\text{-c})$$

où on a $u_f^* = \dfrac{u_f}{u_{fo}}$; $i_f^* = \dfrac{i_f}{i_{fo}}$; $T_f^* = \omega_o T_f = \omega_o \dfrac{L_f}{R_f}$;

$p^* = \dfrac{p}{\omega_o}$; $\psi_f^* = \dfrac{\psi_f}{L_f i_{fo}}$; $u_a^* = \dfrac{u_a}{u_{ao}}$; $\psi_{aq}^* = \dfrac{\psi_{aq}}{\psi_{aqo}}$;

$\omega^* = \dfrac{\omega}{\omega_o}$; $C^* = \dfrac{C}{C_o}$; $J^* = -\dfrac{J \omega_o^2}{i_{ao} \psi_{aqo}}$; $i^* = \dfrac{i_a}{i_{ao}}$.

Pour décrire complètement le système, nous devons ajouter à ces équations les équations qui relient les flux aux courants et à l'angle ρ ainsi que l'équation de charge, soit (toujours en éliminant $\Delta \psi_a^*$ par l'équation (8-c), $\Delta \psi_a^* = p^* \Delta \psi_{aq}^*$):

$$\Delta \psi_{aq}^* = \Delta i_f^* + \operatorname{cotg} \rho_o \Delta \rho \quad (11\text{-a})$$

$$p^* \Delta \psi_{aq}^* = -\operatorname{cotg} \rho_o \Delta i^* + \Delta \rho + \operatorname{cotg} \rho_o \Delta i_a^* \quad (11\text{-b})$$

$$\Delta \psi_f^* = \Delta i_f^* - K^2 \cos^2 \rho_o \Delta i_a^* + K^2 \sin \rho_o \cos \rho \ \Delta \rho \quad (11\text{-c})$$

$$\Delta u_a^* = (1 + T_c^* p^*) \Delta i_a^* \quad (11\text{-d})$$

où K est le coeficiente de couplage entre l'inducteur et l'induit et $T^* = \omega_o L_c / R_c$ est la constante de temps de la charge.

Nous disponsons donc, au total, d'un système de 7 équations, avec 7 sorties i_a^*, i_f^*, ψ_f^*, ψ_{aq}^*, ω^*, ρ, u_a^* et 2 entrées u_f^*, C^*.

Pour les applications envisagées nous allons retenir comme sorties i_a^* et ω^* et éliminer les autres variables. Néanmoins, par commodité d'écriture, nous garderons dans les équations, comme variable intermédiaire, le flux en quadrature ψ_{aq}^*.

Dorénavant, nous allons abandoner le sybol (*) pour les variables réduites, étan entendu que, sauf indication en contraire, nous travaillerons toujours avec des grandeurs réduites.

2.1 — Modèle général, du quatrième ordre

Pour éliminer les variables i_f, ρ nous partons des équations (11-a, b) qui donnent

$$\Delta \rho = \sin \rho_o \cos \rho_o [(1 + \operatorname{tg} \rho_o p) \Delta \psi_{aq} - \Delta i_a] \quad (12\text{-a})$$

$$\Delta i_f = (\sin^2 \rho_o - \sin \rho_o \cos \rho_o p) \Delta \psi_{aq} + \cos^2 \rho_o \Delta i_a \quad (12\text{-b})$$

En introduisant les équations (12) ainsi que les équations (11-c,d) en (10), on obtient le système:

$$\Delta u_f = [(1 + T_f' p) - \sin^2 \rho_o (1 + T_f'' p)] \Delta i_a + [\sin^2 \rho_o (1 + T_f'' p) + T_f' p (1 + T_f''' p)] \Delta \psi_{aq} \quad (13\text{-a})$$

$$O = [T_c' p + \sin^2 \rho_o (1 + T_a' p)] \Delta i_a - [\sin^2 \rho_o (1 + T_a' p) + T_a'^2 p^2] \Delta \psi_{aq} - \sin^2 \rho_o \Delta \omega \quad (13\text{-b})$$

$$\Delta C = \Delta i_a + \Delta \psi_{aq} + J p \Delta \omega \quad (13\text{-c})$$

Dans ces équations variationnelles figurent les constantes de temps éléctriques suivantes, caractéristiques du système et de la charge:

$$T_f' = \frac{\omega_o L_f}{R_f} (1 - K^2 \cos^2 \rho_o) \quad (14\text{-a})$$

$$T_f'' = \frac{\omega_o L_f}{R_f} (1 + K^2 \cos^2 \rho_o) \quad (14\text{-b})$$

$$T_f''' = \frac{\omega_o L_f}{R_f} (1 - K^2 \sin^2 \rho_o) \quad (14\text{-c})$$

$$T_a' = \frac{\omega_o L_a}{R_c} \sin^2 \rho_o = -\sin \rho_o \cos \rho_o \quad (14\text{-d})$$

$$T_c' = \frac{\omega_o L_c}{R_c} \sin^2 \rho_o \quad (14\text{-e})$$

où la deuxième égalité (14-d) provient des équations de régime permanent (7).

La comparaison des constantes de temps précedentes peut fournir des indications utiles pour la simplification des équations variationnelles du système, comme nous verrons.

2.2 — Modéle du troisième ordre

Nous pouvons abaisser l'ordre du modèle en négligeant la derivée $\dot{\psi}_a$ (ainsi que $\dot{\psi}_{aq}$) dans les équations d'induit, par l'analogie avec ce que est fait dans l'étude classique de l'alternateur ou de la machine à courant continu.

Ainsi, si on élimine $p\,\Delta\,\psi_{aq}$ [par l'équation d'induit (8-c)] on obtient $\Delta\,\psi_a = 0$. L'expression (11-b) devient nulle et sa cobinaison avec (11-a) fournit les nouvelles relations:

$$\Delta\,\rho = \sin\rho_o \cos\rho_o\,(\Delta\,\psi_{aq} - \Delta\,i_a) \qquad (15\text{-a})$$

$$\Delta\,i_f = \sin^2\rho_o\,\Delta\,\psi_{aq} + \cos^2\rho_o\,\Delta\,i_a \qquad (15\text{-b})$$

L'introduction de ces résultats fournit le nouveau système d'équations simplifiées:

$$\Delta\,u_f = \left[(1+T'_f\,p) - \sin^2\rho_o\,(1+T''_f\,p)\right]\Delta\,i_a + \sin^2\rho_o\,(1+T''_f\,p)\,\Delta\,\psi_{aq} \qquad (16\text{-a})$$

$$O = \left[T'_e\,p + \sin^2\rho_o(1+T'_a\,p)\right]\Delta\,i_a - \sin^2\rho_o\,(1+T'_a\,p)\,\Delta\,\psi_{aq} - \sin^2\rho_o\,\Delta\,\omega \qquad (16\text{-b})$$

$$\Delta\,C = \Delta\,i_a + \Delta\,\psi_{aq} + J\,p\,\Delta\,\omega \qquad (16\text{-c})$$

Ce système d'équations est du troisième ordre, comme annoncé au départ.

Malgré le fait d'avoir négligé $\dot{\psi}_a$ la constante de tempes T'_a figure dans les équations concernant l'induit et cela parce que les balais du système restent mobiles dans le modèle.

On peut faire disparaitre cette constante de temps si, en plus de négliger $\dot{\psi}_a$, on néglige $\dot{\rho}$ dans les équations d'induit, c'est-à-dire, le terme $p\,\Delta\,\rho$ dans l'équation (8-b).

Cette simplification supplémentaire est équivalente à supposer $\dot{\psi}_d = 0$ et $\dot{\psi}_q = 0$, dans un modèle de Park de la génératrice à redresseur **[1]**. Cette hypothèse est justement celle qui a été adoptée dans la référence **[6]** pour simplifier les équations variationnelles de la génératrice à redresseur.

Avec notre écriture des équations, on obtient dans ce cas le système suivant:

$$\Delta\,u_f = \left[(1+T'_f\,p) - \sin^2\rho_o\,(1+T''_f\,p)\right]\Delta\,i_a + \sin^2\rho_o\,(1+T''_f\,p)\,\Delta\,\psi_{aq} \qquad (17\text{-a})$$

$$O = (T'_e\,p + \sin^2\rho_o)\,\Delta\,i_a - \sin^2\rho_o\,\Delta\,\psi_{aq} - \sin^2\rho_o\,\Delta\,\omega \qquad (17\text{-b})$$

$$\Delta\,C = \Delta\,i_a + \Delta\,\psi_{aq} + J\,p\,\Delta\,\omega \qquad (17\text{-c})$$

où intervient une seule constante de temps à l'induit quis est T'_e

2.3 — Modèle du second ordre

Lorsque les effets de la charge électrique sont dominantes, on peut simplifier davantage le modèle en négligeant, en plus des derivées $\dot{\psi}_a$, $\dot{\psi}_{aq}$, la derivée du flux à l'inducteur $\dot{\psi}_f$.

Les équations du système deviennent alors

$$\Delta\,u_f = (1-\sin^2\rho_o)\,\Delta\,i_a + \sin^2\rho_o\,\Delta\,\psi_{aq} \qquad (18\text{-a})$$

$$O = \left[T'_e\,p + \sin^2\rho_o\,(1+T'_a\,p)\right]\Delta\,i_a - \sin^2\rho_o\,(1+T'_a\,p)\,\Delta\,\psi_{aq} - \sin^2\rho_o\,\Delta\,\omega \qquad (18\text{-b})$$

$$\Delta = \Delta\,i_a + \Delta\,\psi_{aq} + J\,p\,\Delta\,\omega \qquad (18\text{-c})$$

La constante de temps T'_a pourra encore être eliminé en imposant à l'induit $\dot{\rho} = 0$, c'est-à-dire, en faisant $\dot{\psi}_d = \dot{\psi}_q = 0$.

On obtient alors

$$\Delta\,u_f = (1-\sin^2\rho_o)\,\Delta\,i_a + \sin^2\rho_o\,\Delta\,\psi_{aq} \qquad (19\text{-a})$$

$$0 = (T'_e\,p + \sin^2\rho_o)\,\Delta\,i_a - \sin^2\rho_o\,\Delta\,\psi_{aq} - \sin^2\rho_o\,\Delta\,\omega \qquad (19\text{-b})$$

$$\Delta\,C = \Delta\,i_a + \Delta\,\psi_{aq} + J\,p\,\Delta\,\omega \qquad (19\text{-c})$$

Dans ce modèle la machine elle-même est réduite à à un simple gain, les éléments énergétiques étant, uniquement, la charge électrique et la partie mécanique.

2.4 — Remarques sur les differents modèles

La comparaison entre les différents modèles, établis par des simples considérations sur les termes $\dot{\psi}$ ou $\dot{\rho}$, peut-être faite à partir des valeurs des constantes de temps du système.

On voit que le passage au modèle du troisième ordre est fait en négligeant des termes où figure la constante de temps T'_a. Dans un premier temps on néglige les termes du second ordre des équations (13), ainsi que la constante T'_a comparé à T''_f T'_f ; dans un second temps, on élimine totalement T'_a, ce qui implique, em particulier, qu'elle soit négligeable comparé à T'_e. Le passage au modèle du second ordre implique, en plus simplifications précedentes, la possibilité de négliger les constantes de temps T'_f, T''_f de l'inducteur, face à la constante de temps T'_e de la charge électrique et à l'inertie mécanique du système.

Cette dernière simplification sera normalment peu satisfaisante pour les génératrices à redresseurs, mais elle sera acceptable pour les systèmes d'excitation statique (qui sont assimilables à des génératrices à redresseurs **[8]**) à condition de pouvoir négliger les fuites du transformateur.

Par contre, l'approximation du troisième ordre parait très raisonnable pour la plupart des applications, de sorte que nous allons la traiter plus en détail et l'utiliser ensuite pour deux exemples d'application importants en pratique, qui sont l'excitation d'alternateurs par diodes tournantes et l'alimentation de moteurs à induction par onduleur de courant.

3 — ÉTUDE ET APPLICATIONS DU MODÈLE SIMPLIFIÉ DU TROISIÈME ORDRE

Dans l'utilisation de ce modèle nous avons interêt à introduire la variable $(\Delta \psi_{aq} - \Delta i_a)$ qui possède un rapport étroit avec la variable $\Delta \rho$ par l'équation (15-a), que nous réecrivons:

$$\Delta \rho = \sin \rho_o \cos \rho_o (\Delta \psi_{aq} - \Delta i_a) \qquad (15\text{-a})$$

Si on introduit la variable $(\Delta \psi_{aq} - \Delta i_a)$ les équations (16) deviennent

$$\Delta u_f = (1 + T'_f p) \Delta i_a + \sin^2 \rho_o (1 + T''_f p) (\Delta \psi_{aq} - \Delta i_a) \qquad (20\text{-a})$$

$$O = T_e p \Delta i_a - (1 + T'_a p) (\Delta \psi_{aq} - \Delta i_a) - \Delta \omega \qquad (20\text{-b})$$

$$\Delta C = 2 \Delta i_a + (\Delta \psi_{aq} - \Delta i_a) + J p \Delta \omega \qquad (20\text{-c})$$

La deuxième équation a été divisée par $\sin^2 \rho_o$, ce qui fait apparaitre explicitement la constanet de temps de la charge $T_e = \dfrac{\omega_o L_e}{R_e}$.

Lorsque $T'_a \ll T'_e$ on pourra pousser plus loin la simplification en négligeant tout à fait la constante de temps T'_a, comme déjà vu dans le paragraphe precédent.

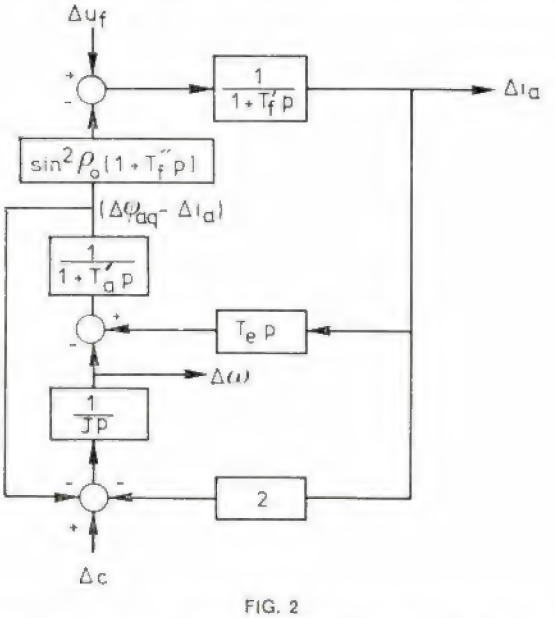


FIG. 2

Schéma-bloc de la génératrice à redresseur (modèle d'ordre 3)

Le système d'équations (20) peut-être representé par un schéma-bloc relativement simple

Ce schéma-bloc est susceptible de transformation qui le rend plus commode, mais nous preférons le garder tel quel, puisque les exemples à considérer par la suite permettent certaines simplifications assez immédiates sur le schéma de la Fig. 2.

Ainsi, par la suite, nous poursuivons l'analyse du modèle à propos de deux exemples concrets.

3.1 — Excitatrices à diodes tournantes

Dans cette application, une génératrice à redresseur, à induit tournant monté sur l'arbre d'un alternateur, fonctionne comme excitatrice, le courant i_a étant alors le courant d'excitation de l'alternateur.

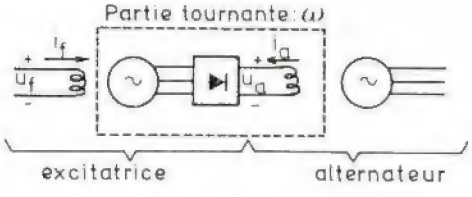


FIG. 3

Excitation par diodes tournantes

L'entrée principale de l'excitatrice est la tension u_f et la sortie principale le courant redressé i_a.

Pour les excitatrices utilisées la constante de temps d'inducteur $T_f = \omega_o L_f / R_f$ est, en général, beaucoup plus grande que la constante de temps du circuit induit $T_a = \omega_o L_e / R_e$ (où figure toute la resistence de charge R_e), de sorte qu'une approximation du troisième ordre est raisonnable.

Quelques simplifications supplémentaires sont encore possibles.

Ainsi, dans les excitatrices à diodes tournantes la vitesse est imposée, pratiquement, par le seul alternateur principal. De la sorte, $\Delta \omega$ devient une entrée, ce qui permet d'ignorer l'équation mécanique.

D'autre part, T_e peut-être assimilé à la constante de temps transitoire en charge T'_{dz} de l'alternateur principal, en général beaucoup plus grande que T'_a. On se trouve donc dans un cas où on pourra, tout à fait, négliger cette dernière.

Avec ces deux approximations supplémentaires, les équations (20) se réduisent à:

$$\Delta u_f = (1 + T'_f p) \Delta i_a + \sin^2 \rho_o (1 + T''_f p) (\Delta \psi_{aq} - \Delta i_a) \qquad (21\text{-a})$$

$$\Delta \omega = T'_{dz} p \Delta i^a - (\Delta \psi_{aq} - \Delta i_a) \qquad (21\text{-b})$$

où ne figure pas la constante de temps T'_a et d'où est disparue l'équation mécanique.

On obtient donc un système d'équations purement électriques, qui est alors du second ordre. Son schéma-bloc est particulièrement simple:

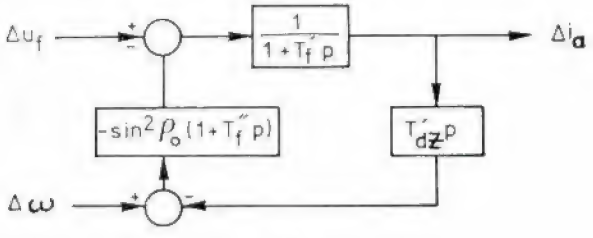


FIG. 4

Schéma-bloc de l'excitatrice à diodes tournantes

Dans la réference **[6]** on étudie un modèle du second ordre de la génératrice à diodes tournantes, qui est équivalent à celui que nous venons de décrire. On y fait sa comparaison au modèle complet, dans plusieurs cas concrets, et on constate qu'il donne satisfaction dans les situations réelles envisageables.

En poursuivant l'analyse du modèle, nous pouvons écrire les fonctions de transfert entre les deux entrées et la sortie. On a

$$\frac{\Delta i_a}{\Delta u_f} = \frac{1}{1+(T'_f+\sin^2\rho_o T'_{dz})\,p+\sin^2\rho_o T'_{dz}T''_f\,p^2} \qquad (22\text{-a})$$

et

$$\frac{\Delta i_a}{\Delta \omega} = \frac{\sin^2\rho_o(1+T''_f\,p)}{1+(T'_f+\sin^2\rho_o T'_{dz})\,p+\sin^2\rho_o T'_{dz}T''_f\,p^2} \qquad (22\text{-b})$$

La fonction de transfert (22-b) correspond à un terme d'amortissement supplémentaire dans l'alternateur principal, normalement négligeable.

En effet, si on utilise des valeurs réduites, de base $P_o = C_o\,\omega_o$ pour la puissance d'amortissement P_D de l'alternateur principal, on a:

$$\frac{\Delta P_D}{\Delta \omega} = \frac{\Delta P_D}{\Delta i_a}\,\frac{\Delta i_a}{\Delta \omega} \qquad (23)$$

Pour un angle de puissance δ constant, on obtient, toujours en valeurs résuites:

$$\frac{\Delta P_D}{\Delta i_a} \approx 1 \qquad (24)$$

On peut donc écrire

$$\frac{\Delta P_D}{\Delta \omega} = \frac{\sin^2\rho_o(1+T''_f\,p)}{1+(T'_f+\sin^2\rho_o T'_{dz})\,p+\sin^2\rho_o T'_{dz}T''_f\,p^2} \qquad (25)$$

Le gain statique, **en valeurs non-réduites,** est

$$G_o = \frac{P_o}{\omega_o}\sin^2\rho_o = C_o\sin^2\rho_o \qquad (26)$$

Ce gain est nul pour $\rho_o \approx \pi$ (géneratrice à redresseur proche du court-circuit) et maximum pour $\rho_o \approx \frac{\pi}{2}$ (génératrice à redresseur proche du vide).

On voit que le terme d'amortissement, de l'ordre de C_o, est d'un ordre inférieur en $\frac{1}{\omega_o}$ aux autres termes de l'équation mécanique approchée:

$$\omega_o J\,\frac{d^2\delta}{dt^2} + \left(\frac{\partial P}{\partial \delta}\right)\delta = 0 \qquad (27)$$

On pourra donc l'ignorer, normalement.

Considérons maintenant les transitoires purement électriques ($\Delta\omega = 0$) et la fonction de transfert (22-a), que nous allons étudier avec un peu plus de détail, en vue de la modélisation des boucles de de régulation de tension.

Ainsi, voyons comment la nature de la réponse dépend des constantes de l'alternateur principal, en particulier de T'_{dz} et des paramètres du systèmes d'excitation, en particulier de $\rho_o = \mathrm{arctg}\,(-R_e/\omega_o L_a)$.

Commeçons par considérer le fonctionnement pour un angle de régime fixé, proche de la puissance maximale de la génératrice: $\rho_o \approx 135°$.

Voyons l'influence du paramètre $T'_e = \sin^2\rho_o T'_{dz}$ sur la nature de la réponse électrique.

L'amortissement critique du système sera obtenu pour les valeurs

$$T'_e = 2\,T''_f\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{T'_f}{T''_f}}\right) - T'_f \qquad (28)$$

qui sont toujours réelles et positives compte tenu des expréssions de T''_f et T'_f.

La réponse sera oscillante pour des valeurs de T'_e comprises entre les deux valeurs critiques précédentes

$$(T'_e)_1 < T'_e < (T'_e)_2 \qquad (29)$$

Pour un angle $\rho_o \approx 135°$ et en admettant un bon couplage de la génératrice $K \approx 1$, on a $T''_f \approx 3\,T'_f \approx \approx 1.5\,T_f$. Ceci donne

$$(T'_e)_1 \approx 0 \qquad (T'_e)_2 \approx 5\,T_f \qquad (30)$$

Donc, compte tenu de $T'_e = \sin^2\rho_o T'_{dz} \approx \frac{1}{2}T'_{dz}$ la réponse sera oscillante pour

$$T'_{dz} < 10\,T_f \qquad (\rho_o \approx 135°) \qquad (31)$$

Celui-ci sera le cas normal pour les systèmes d'excitation par diodes tournantes.

En dehors de cette zone normale d'utilization, où la réponse est oscillante, le système présentera des réponses amorties qui pourront, à la limite, être représentées par des systèmes du premier ordre.

Ainsi, pour $T'_e < (T'_e)_1$ on peut supposer $T'_e \rightarrow 0$ et on obtient alors un système du premier ordre, avec une constante de temps T'_f.

Pour $T'_e > (T'_e)_2$ on peut admettre que la charge est dominante et poser $T_f \rightarrow 0$. On obtiendra alors un système du premier ordre, qui correspond simplement au circuit inducteur de l'alternateur.

Considérons maintenant une valeur fixé pour T'_{dz} et voyons l'influence de l'angle de régime ρ_o sur le comportement du système.

Si le système est conçu pour travailler avec des angles ρ_o proches de $\pi/2$ (c'est-à-dire, génératrice à redresseur proche de la marche à vide), on obtient $T'' \approx T' \approx T_f$.

Dans ces circonstances les deux valeurs critiques sont égales à T_f et le système est toujours amorti, présentant les constantes de temps T_f et T'_{dz}.

On obtient ainsi, compte tenu de $\sin\rho_o \approx 1$:

$$\frac{\Delta i_a}{\Delta u_f} = \frac{1}{(1 + T_f p)(1 + T'_{dz} p)} \qquad (32)$$

Ce modèle est identique à celui d'une excitatrice classique à collecteur, ce qui résulte justement du fait que les balais sont fixés dans une position proche de $\pi/2$.

Si le système est conçu pour travailler proche du court-circuit ($\rho_o \approx \pi$), on obtient, pour T'_{dz} fini, une constante $T'_e = \sin^2 \rho_o T'_{dz} \approx 0$. Dans ces circonstances le système devient un système du premier ordre, caracterisé par la constante de temps $T'_f = (1-K^2) T_f = \sigma T_f$ qui est la constante de temps transitoire longitudinale en court-circuit de l'excitatrice

$$\frac{\Delta i_a}{\Delta u_f} = \frac{1}{1 + \sigma T_f p} \qquad (33)$$

Dans ce cas il y a une predominance de l'excitatrice sur l'inducteur de l'alternateur principal, ce qui n'est pas une situation normale.

Remarquons, néanmoins, que la situation $\rho_o \approx \pi$ pourra se présenter avec les machines criogéniques, mais dans ce cas, déjà traité dans la reférence **[5]**, on ne pourra pas négliger T'_e à cause de l'augmentation de T'_{dz}. On a même constaté l'existance d'une possible instabilité électrique du système, qui ne pourra pas être étudiée avec le modèle simplifié que nous sommes en train de considérer.

En conclusion de l'étude, nous dirons que, dans les situations normales, le transfert entre la tension d'entrée de l'excitatrice u_f et le courant d'excitation de l'alternateur i_a est donné par une fonction du second ordre, avec réponse normalement oscillante.

L'approximation du premier ordre, parfois adoptée pour ce type d'excitatrice, ne sera correcte que pour certains cas extrêmes, moins fréquents en pratique.

3.2 — Stabilité du moteur à induction alimenté par un onduleur de courant

Nous allons considérer un moteur à induction alimenté par un onduleur de courant, système représenté dans la Fig. 5.

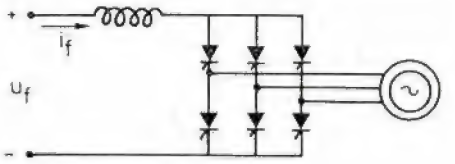


FIG. 5

Moteur à induction alimenté par onduleur de courant

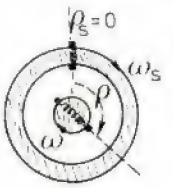
Le système présente un certain nombre de problèmes de stabilité, étudiés avec détail, pour des cas concrets, par exemples dans les reférences **[9], [10], [11].**

Les études precédentes, effectuées par voie numérique sur les équations complètes du système, ne permettent pas de dégager des conditions analytiques simples de stabilité, ni de voir très clairement l'influence des différents paramètres.

Une première tentative d'étude analytique du problème est faite dans la reférence **[12]**, moyennant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices permettant de dégager les principaux phénomènes en jeu.

Nous allons reprendre le problème de la stabilité du système à partir des équations variationnelles de la génératrice à redresseur.

Pour cela, nous utiliserons un résultat établi dans la reférence **[12]**, qui montre que le moteur à induction alimenté par onduleur de courant est équivalent à une génératrice à redresseur, mais dont l'inducteur est aussi un circuit à commutation.



FIGI 6

Modèle du moteur à induction alimenté par un onduleur de courant

Pour le voir, nous allons considérer le stator du moteur comme l'inducteur et assimiler l'entrée (coté continu) de l'onduleur à une paire de balais, comme pour le redresseur en pont.

Ces balais tournent avec une fréquence angulaire ω_s, imposée par la fréquence de commande de l'onduleur.

Maintenant nous prendrons comme referentiel celui des balais du stator, de sorte que ces balais deviennent fixes et c'est le stator qui tourne avec une frequence ω_s.

Ce referentiel sera celui de l'inducteur de la génératrice à redresseur, qui est donc un circuit à commutation.

L'induit de la génératrice sera formé par le rotor du moteur à induction, tournant par rapport à l'inducteur avec une vitesse $\omega = g\,\omega_s$ où g est le glissement du moteur à induction.

En supposant le circuit rotorique du moteur comme polyphasé et à couplage sinusoïdal, nous pouvons le réduire à un circuit à commutation, par la transformation $\alpha\,\beta \rightarrow \gamma\,\delta$ **[13].**

Nous obtenons donc un induit de génératrice à redresseur, avec la seule particularité qu'il se trouve en court-circuit. Ce fait signifie que $T'_e = 0$, ce qui permettra de simplifier les équations.

Les équations de la génératrice à redresseur seront donc applicables au système, à condition d'ajouter à l'équation d'inducteur un terme u'_f de tension induite par commutation, comme le dernier terme de l'équation (2). Compte tenu de $\dot{\rho}_s = 0$, on a, valeurs non réduites:

$$u'_f = \frac{\omega_s}{i_f} \frac{\partial W_{cm}}{\partial \rho_s} \tag{34}$$

Avec des couplages sinusoïdaux, la mutuelle inducteur/induit est de la forme $M = -M_o \cos(\rho - \rho_s)$, de sorte que, pour $\rho_s = 0$ on obtient

$$u'_f = -\omega_s M_o \sin\rho \, i_a \tag{35}$$

La variation $\Delta u'_f$ est donc, en valeurs non réduites:

$$\Delta u'_f = -\omega_s M_o \sin\rho_o \, \Delta i_a - \omega_o M_o \cos\rho_o \, i_{ao} \, \Delta \rho \tag{36}$$

Ce qui donne, en valeurs réduites:

$$\Delta u'^*_f = -\frac{1}{g_o} K^2 T^*_1 (\sin\rho_o \cos\rho_o \, \Delta i^*_a + \cos^2\rho_o \, \Delta \rho) \tag{37}$$

Cette tension supplémentaire à l'inducteur peut donc se traduire par deux simples réalimentations de la génératrice à redresseur à partir des sorties i_a et ρ.

Pour introduir ces réalimentations, nous partirons directement du modèle du troisième ordre, qui est valable si on fait l'hypothèse que la constante de temps du circuit inducteur est plus importante que celle du circuit induit, ce qui sera possible grace à la presence de la self extérieure de lissage.

Compte tenu du fait que T_e est nulle, nous utiliserons le premier modèle du troisième ordre, où figure la contante de temps T'_a.

Le schéma-bloc de la Fig. 2 devient ainsi, en utilisant toujours des grandeurs réduites:

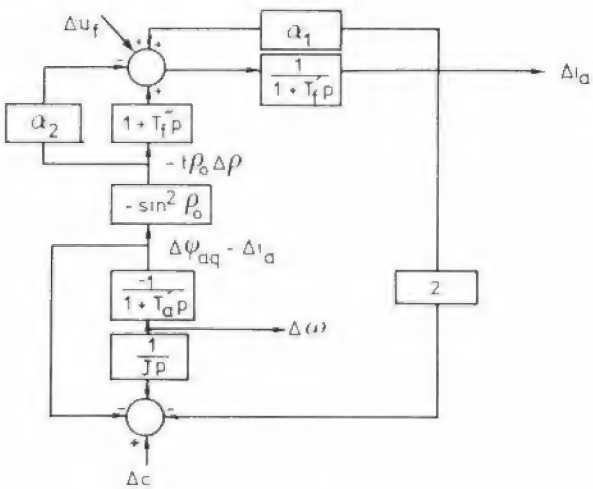


FIG. 7

Schèma-bloc du moteur à induction alimenté par un onduleur de courant

Les constantes α_1 et α_2 sont données par

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_o} K^2 T_f \sin\rho_o \cos\rho_o \tag{38-a}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{g_o} K^2 T_f \frac{\cos^3\rho_o}{\sin\rho_o} = \alpha_1 \operatorname{cotg}^2\rho_o \tag{38-b}$$

Nous allons nous intéresser au transfert $\frac{\Delta i_a}{\Delta C}$. Une transformation simple nous donne alors le schéma-bloc suivant, plus simples:

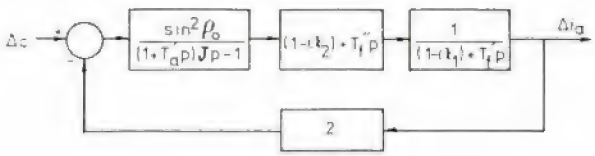


FIG. 8

Schéma-bloc du moteur à induction alimenté par onduleur de courant

Le polynome caractéristique du système s'obtient facilement:

$$\Delta = J T'_a T'_f p^3 + J [T'_f + (1 - \alpha_1) T'_a] p^2 + \tag{39}$$

$$+ [2 \sin^2\rho_o T''_f - T'_f + J (1 - \alpha_1)] p + [2 \sin^2\rho_o (1 - \alpha_2) - (1 - \alpha_1)]$$

soit, en éliminant α_2 en fonction de α_1:

$$\Delta = J T'_a T'_f p^3 + J [T'_f + (1 - \alpha_1) T'_a] p^2 + \tag{40}$$

$$+ [2 \sin^2\rho_o T''_f - T'_f + J (1 - \alpha_1)] p - \cos 2\rho_o (1 + \alpha_1)$$

Il s'agit d'un polynome du troisième ordre $\Delta = a_o p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$ que nous allons traiter par le critère de Routh-Hurwitz.

A fin de faciliter l'étude, nous transformerons d'abords α_1, pour avoir une expression plus commode, où figurent les paramètres de l'inducteur et de l'induit. Si on tient compte de $T_f = \frac{\omega_o L_f}{R_f} = \frac{g_o \omega_s L_f}{R_f}$ on obtient

$$\alpha_1 = \frac{\omega_s M_o^2}{2 L_a R_f} \sin 2\rho_o \tag{41}$$

L'angle ρ_o variant entre 90° et 180°, la fonction α_1 est toujours negative.

Nous avons intêret à représenter les fonctions $1 - \alpha_1$ et $1 + \alpha_2$, qui interviennent dans le polynome caractéris-

tique, parce que cela nous facilitera l'analyse qui doit suivre:

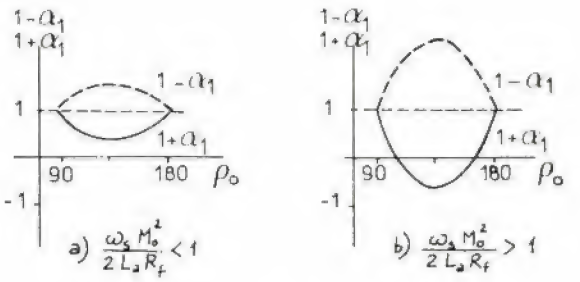


FIG. 9

Fonctions $(1-\alpha_1)$ et $(1+\alpha_1)$, selon la valeur de $\dfrac{\omega_s M_o^2}{2 L_a R_f}$

Passons maintenant à l'étude de la stabilité du système, en analysant le polynome caractéristique.

3.2.1 — Stabilité apériodique

Nous remarquons d'abords l'existance de limites de stabilité apériodique, imposées par la condition $a_3 > 0$, soit

$$-\cos 2\rho_o (1 + \alpha_1) > 0 \qquad (42)$$

Une limite de stabilité est atteinte pour

$$\cos 2\rho_o = 0 \qquad (43)$$

soit $\rho_o = 135^o$.

Compte tenu du fait que $\operatorname{tg} \rho_o = -\dfrac{R_e}{\omega_o L_a} = -\dfrac{R_e}{g_o \omega_s L_a}$

la limite précedente est obtenue pour

$$g_o = \frac{R_e}{\omega_s L_a} \qquad (44)$$

Étudions le comportement du système à droite et à gauche de ce point.

Nous devons distinguer deux cas, selon le signe de $(1 + \alpha_1)_{135^o}$

a) $\dfrac{\omega_s M_o^2}{2 L_a R_f} < 1$

Dens ce cas $(1 + \alpha_1)_{135^o} > 0$, de sorte que le terme $a_3 = -\cos 2\rho_o (1 + \alpha_1)$ est positif si $\rho_o < 135^o$ et négatif si $\rho_o > 135^o$.

Pour que le système soit stable il faut donc que l'on ait $\rho_o < 135^o$, soit $g_o < R_e / \omega_s L_a$.

Cette situation correspond à avoir une caractéristique electromécanique du type suivant

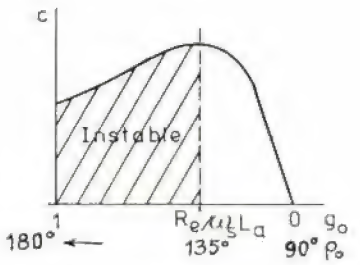


FIG. 10

Limite de stabilité apériodique pour $\dfrac{\omega_s M_o^2}{2 L_a R_f} < 1$

Avec un couple extérieur C_o constant, le fonctionnement ne pourra donc être stable qu'au delà du maximum de couple.

b) $\dfrac{\omega_s M_o^2}{2 L_a R_f} > 1$

Dans ce cas, on a $(1 + \alpha_1)_{135^o} < 0$, comme on voit dans la figure 9.

Pour que le système soit stable autour du glissement critique $g_o = R_e / \omega_s L_a$ il faut donc que $\rho_o > 135^o$; il sera instable pour $\rho_o < 135^o$.

Cette situation correspond à une caractéristique electromécanique du type suivant

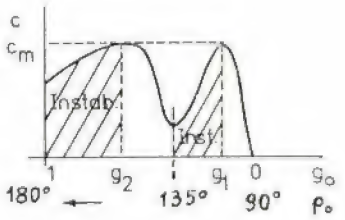


FIG. 11

Stabilité apériodique pour $\dfrac{\omega_s M_o^2}{2 L_a R_f} > 1$

La condition $(1 + \alpha_1) < 0$ reste valable jusqu'à deux limites ρ_1, ρ_2 où $(1 + \alpha_1) = 0$. Pour déterminer ces limites nous introduisons l'expression (41) de α_1 et nous utilisons le fait que

$$\sin 2\rho_o = \frac{2 \operatorname{cotg} \rho_o}{1 + \operatorname{cotg}^2 \rho_o} = \frac{2 \operatorname{tg} \rho_o}{1 + \operatorname{tg}^2 \rho_o}$$

Nous obtenons, soit l'équation:

$$\operatorname{cotg}^2 \rho_o + \frac{\omega_s M_o^2}{R_f L_a} \operatorname{cotg} \rho_o + 1 = 0 \qquad (45)$$

soit l'équation:

$$\operatorname{tg}^2 \rho_o + \frac{\omega_s M_o^2}{R_f L_a} \operatorname{tg} \rho_o + 1 = 0 \qquad (46)$$

Le système possède donc deux solutions ρ_1, ρ_2 telles que $\operatorname{tg} \rho_1 = \operatorname{cotg} \rho_2$ soit, compte tenu de $90^o < \rho_o < 180^o$, telles que $\rho_1 + \rho_2 = 270^o$.

Les glissements correspondants sont donnés par

$$g = \frac{M_o^2 R_e}{2 L_a^2 R_f} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2 L_a R_f}{\omega_s M_o^2} \right)^2} \right] \qquad (47)$$

qui est le résultat proposé dans la référence **[14]** et retrouvé dans les références **[9], [10], [11].**

Au delà des limites g_1 et g_2 fournies par (47), les conditions de stabilité apériodique changent, comme representé sur la figure 11.

Si $\frac{\omega_s M_o^2}{2 L_a R_f} \gg 1$, comme il arrive souvent en pratique, on obtient

$$g_1 \approx 0 \qquad g_2 \approx \frac{M_o^2 R_e}{L_a^2 R_f} = K^2 \frac{T_f}{T_a} \qquad (48)$$

Remarquons que dans ce cas g_2 peut-être supérieur à 1 et que les angles ρ_o correspondants à g_1 et g_2 sont alors $\rho_1 \approx 90°$ et $\rho_2 \approx 180°$.

Le couple est le même pour les deux limites g_1 et g_2 et il peut être determiné par l'étude de la caractéristique electromécanique [14]. On obtient alors

$$C_m = \frac{1}{4} \frac{u_f^2}{\omega_s R_f} \qquad (49)$$

Nous utiliserons ce résultat plus loin.

3.2.2 — Stabilité périodique

Nous allons maintenant analyser les autres conditions de stabilité du système, qui donnent origine aux instabilités oscillatoires observées en pratique.

Compte tenu du fait que α_1 est négatif, le terme a_1 est toujours positif.

Il nous restera donc à analyser les conditions $a_2 > 0$ et $a_1 a_2 - a_o a_3 > 0$.

En réalité, il nous suffirait d'analyser la deuxième condition, puisqu'elle implique la condition $a_2 > 0$.

Néanmoins, nous analyserons aussi, directement, la condition $a_2 > 0$, puisque cela nous donne les résultats qui seraient obtenus avec l'approximation supplémentaire du modèle qui consiste à négliger tout à fait la constante de temps T'_a. Parce-que $T'_e = 0$, cela nous conduirait à un modèle du second ordre.

Nous allons séparer les deux cas typiques identifiés selon la valeur de $\frac{\omega_s M_o^2}{2 L_a R_f}$ et étudier ce qui se passe dans les zones stables, apériodiquement, de ces deux cas.

3.2.2.1 — Cas $\frac{\omega_s M_o^2}{2 L_a R_f} < 1$

Ce cas correspond à la caractéristique electromécanique de la Fig. 10 et nous savons déjà que le système ne sera stable aperiodiquement que dans la zone où $\rho_o < 135°$.

Dans cette zone, la condition $a_2 > 0$, soit

$$2 \sin^2 \rho_o T''_f - T'_f + J (1 - \alpha_1) > 0 \qquad (50)$$

est toujours verifiée.

En effet, pour $\rho_o < 135°$ on a $2 \sin^2 \rho_o > 1$. Puisque $T''_f > T'_f$ et $\alpha_1 < 0$ la somme sera donc positive.

Considérons la condition $a_1 a_2 - a_o a_3 > 0$, soit, après division par J:

$$[T'_i + (1 - \alpha_1) T'_a] \cdot [2 \sin^2 \rho_o T''_f - T'_f + J (1 - \alpha_1)] +$$
$$+ T'_a T'_f \cos 2 \rho_o (1 + \alpha_1) > 0 \qquad (51)$$

Le dernier terme étant négatif dans la zone considerée de stabilité aperiodique, la condition pourrait ne pas être satisfaite. En réalité nous allons voir qu'elle l'est toujours compte tenu de l'hypothèse $T_f > T_a$ déjà faite.

Puisque $(1 - \alpha_1) T'_a$ est positif, la condition (51) sera verifiée si on verifie la condition plus sevère que l'on obtient en négligeant $(1 - \alpha_1) T'_a$.

Si on divise encore par T'_f, on a:

$$2 \sin^2 \rho_o T''_f - T'_f + J (1 - \alpha_1) + T'_a \cos 2 \rho_o (1 + \alpha_1) > 0 \qquad (53)$$

Si on developpe T''_f et T'_f et on utilise l'égalité $1 - 2 \sin^2 \rho_o = \cos 2 \rho_o$, la relation (52) devient

$$\cos 2 \rho_o [\sin^2 \rho_o T_a (1 + \alpha_1) - T_f] +$$
$$+ K^2 \cos^2 \rho_o (1 + 2 \sin^2 \rho_o) T_f + J (1 - \alpha_1) > 0 \qquad (53)$$

Compte tenu du fait que $1 + \alpha_1 < 1$ et de $\cos 2 \rho_o < 0$, dans la zone considerée, le premier terme sera toujours positif si

$$T_a < T_f \qquad (54)$$

hypothèse que nous avons dejà admis.

Les autres termes de (53) étant positifs, nous concluons que la condition sera donc satisfaite.

En conclusion, le système sera stable periodique et apériodiquement, pour $\rho_o < 135°$, si la condition $T_a < T_f$ est satisfaite, ce qui est une hypothèse acceptable pour le moteur à induction alimenté par onduleur de courant.

3.2.2.2 — Cas $\frac{\omega_s M_o^2}{2 L_a R_f} > 1$

Dans ce cas nous avons identifié deux zones de stabilité apériodique, que nous devons maintenant étudier.

Dans la zone des petits glissements, où $\rho_o < 135°$, nous pouvons utiliser les arguments du cas precédent, et conclure que le système sera periodiquement stable, si on vérifie la condition

$$T_a < T_f \qquad (55)$$

Les problèmes peuvent apparaitre dans l'autre zone de stabilité apériodique, obtenue pour $\rho_o > 135°$.

En ce qui concerne la condition $a_2 > 0$, soit

$$2 \sin^2 \rho_o T''_f - T'_f + J(1-\alpha_1) > 0 \qquad (56)$$

nous voyons qu'elle pourra ne pas être verifiée, parce que, maintenant, on a $2 \sin^2 \rho_o < 1$.

Cette condition n'est pas très commode, de sorte que nous allons chercher une condition plus simple, bien qu'approximée.

Compte tenu de la self extérieur, le couplage K^2 est très petit. Nous ne commettrons donc pas une grande erreur en remplaçant T''_f par T'_f dans l'expression (56). ce qui donne une condition plus forte:

$$J(1-\alpha_1) > \cos 2 \rho_o T'_f \qquad (57)$$

Cette condition est verifiée pour $\rho_o = 135°$.

Si α_1 est important et compte tenu des expressions des valeurs réduites, nous pouvons conclure que le premier membre croit, au départ, moins vite que le second, avec l'angle ρ_o (dans le rapport $\cos^2 \rho_o / \cos 2 \rho_o$).

Ceci nous ammenera à chercher une condition suffisante de stabilité pour toute la zone considerée, que sera obtenue en considérant le fonctionnement proche du couple maximum C_m.

On peut alors faire $\cos^2 \rho \approx 1$, $1-\alpha_1 \approx 2$ et $T'_f \approx \sigma T_f$ où $\sigma = 1-K^2$ est le coefficient de fuites. La condition (57) devient donc

$$J_m > \frac{1}{2} \sigma T_{fm} \qquad (58)$$

que nous prendrons comme une condition suffisante pour toute la zone de fonctionnement considerée.

Celle-ci serait la conclusion d'une étude faite avec le modèle plus simplifié, où on aurait posé $T'_a = 0$.

Si on utilise le modèle plus complet, où cette simplification n'est pas faite, on doit encore considérer la condition plus sevère, $a_1 a_2 - a_o a_3 > 0$, dejà écrite en (51):

$$[T'_f + (1-\alpha_1) T'_a] \cdot [2 \sin^2 \rho_o T''_f - T'_f + J(1-\alpha_1)] +$$

$$+ T'_a T'_f \cos^2 \rho_o (1+\alpha_1) > 0 \qquad (59)$$

Cette condition est difficile d'analyser et nous chercherons aussi une autre condition, plus forte, qui la remplace.

Ainsi, compte tenu du fait que l'on a $T'_f < T''_f$ est que la condition (55) implique $T'_a < T'_f$, on peut écrire:

$$(2-\alpha_1) [2 \sin^2 \rho_o T'_f - T'_f + J(1-\alpha_1)] +$$

$$+ T'_f \cos 2 \rho_o (1+\alpha_1) > 0 \qquad (60)$$

Soit, après quelques transformations simples:

$$J(1-\alpha_1) > \left(1 - \frac{1+\alpha_1}{2-\alpha_1}\right) \cos 2 \rho_o T'_f \qquad (61)$$

Cette condition est plus sevère que la condition (57), puisque le coefficient du second membre est compris entre 1 et 2, dans la zone considerée.

Néanmois, si nous acceptons les arguments utilisés pour la condition précedente, selon lequels il fallait considérer ce qui se passe du coté du couple maximum, le coefficient tends alors vers 1, se qui nous conduit de nouveau à la même condition (58), soit

$$J_m > \frac{1}{2} \sigma T_{fm} \qquad (62)$$

Cette condition parait donc assez forte pour assurer la stabilité dans la zone des grands glissements.

3.2.3 — Verification des résultats

On peut résumer maintenant les résultats obtenus.

Dans le cas $\frac{\omega_s M_o^2}{2 L_a R_f} < 1$, correspondant à la Fig. 11, on arrive à la conclusion que le système est periodiquement stable, compte tenu du fait que l'on peut admettre comme normalement satisfaite la condition suffisante:

$$T_a < T_f \qquad (63)$$

Dans le cas $\frac{\omega_s M_o^2}{2 L_a R_f} > 1$, correspondant à la Fig. 12, en plus de la condition precédente, assurant la stabilité periodique dans la zone des petits glissements, on est arrivé à une autre condition dans la zone des grands glissements, à laquelle on a donné l'expression approchée (62).

Compte tenu du fait que cette expression est écrite en valeurs réduites, on préferera utilizer une expression **en valeurs non-réduites**, qui est:

$$\frac{J}{u_f^2} > \frac{\sigma T_f}{8 R_f \omega_s^2 g_m} \qquad (64)$$

où g_m est le glissement pour le couple maximum.

Pour l'approximation $g_m \approx \left(\frac{M_o}{L_a}\right)^2 \frac{R_a}{R_f}$ on pourra écrire

$$\frac{J}{u_f^2} > \frac{\sigma L_f L_a^2}{8 \omega_s^2 M_o^2 R_f R_a} \qquad (65)$$

Dans la Fig. 13, nous comparons ce résultat à celui obtenu, numériquement, dans la reférence **[11]**, pour un système qui satisfait aux conditions de notre étude, en particulier, $T_f / T_a = 4{,}9$, $\frac{\omega_s M_o^2}{2 L_a R_f} = 6{,}3$ $g_m = 0{,}5$ et $\rho_o (g_m) = 171°$

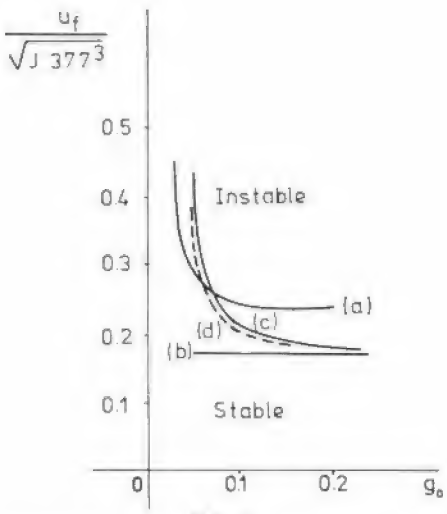


FIG. 12

Limite de stabilité pour un sistème avec $\sigma = 0{,}9$; $T_f = 0{,}68_s$; $R_f = 9{,}2\ \Omega$; $\omega_s = 2\pi \times 30\ s^{-1}$

a) Étude numérique complète du système;
b) Condition (64); c) Condition (56);
d) Condition (59).

La condition de stabilité (65) montre que l'augmentation de J, R_f, R_a et ω_s ont un effet favorable sur la stabilité periodique, tandis que l'augmentation de u_f et L_f ont un effet défavorable. Ces résultats sont, justement, confirmés par l'étude numérique faite dans la reférence **[11]**.

La condition montre encore qu'une diminution de $\sigma = 1 - \frac{M_o^2}{L_a L_f}$ et de L_a sera favorable à la stabilité periodique.

Les résultats obtenus montrent que dans le cas considéré on pourrait même adopter le modèle plus simplifié, où on néglige T'_a, de sorte que le système s'étudie, pratiquement, comme un système du second ordre.

Mais l'étude de la stabilité pourra se compliquer dans le cas où la condition (63) n'est pas satisfaite, l'utilisation du modèle du troisième ordre lui même étant alors peu acceptable.

Dans la reférence **[10]** on considère des cas où la condition (63) n'est pas verifiée et les résultats obtenus, numériquement, laissent prévoir que les conditions de stabilité seront plus complexes que celles établies dans notre étude, le système devenant pratiquement inutilisable sans boucles de stabilisation.

Certaines conclusions pour le cas où $T_f \approx T_a$ sont indiquées dans la reférence **[12]** et elles s'accordent encore, d'une façon générale, avec celles de **[10]**.

4 — CONCLUSION

Nous avons effectué une étude analytique des équations variationnelles de la génératrice à redresseur et établit plusieurs modèles simplifiés, justifiés soit par des approximations à priori (en négligeant l'effet de termes comme $\frac{d\psi}{dt}$) soit par des approximations numériques à posteriori (en négligeant des constantes de temps).

D'une façon générale, il est apparu que l'essentiel du comportement du système est décrit par un modèle d'ordre réduit, comme il avait déjà été constaté dans les reférences **[4]**, **[6]**.

Nous avons ensuite utilisé un modèle simplifié pour étudier la fonction de transfert des excitatrices à diodes tournantes et la stabilité du moteur à induction alimenté par onduleur de courant.

Pour les excitatrices à diodes tournantes, nous avons montré que leur réponse est normalement oscillante et que, donc, le modèle classique d'excitatrice inspiré des machines à collecteur, n'est pas recommendé.

Pour le moteur à induction alimenté par onduleur de courant, nous avons obtenu certaines conditions suffisantes de stabilité, analytiquement simples, qui recouvrent l'essentiel des phénomènes et qui donnent une idée de l'influence des différents paramètres du système.

REFÉRENCES

[1] — **M. S. Garrido:** *Équations de la génératrice à redresseur. Étude du régime permanent,* Revue E, vol. VII, n.º 3, 1972.
Special effects in rectified output A. C. generators, Int. Conference on Electrical Machines, Bruxelles, Sept. 1978.

[2] — **F. Labrique:** *Commutation processes in polyphase commutatorless DC generators,* Int. Conf. on Electrical Machines, Bruxelles, Sept. 1978.

[3] — **H. Buyse & M. S. Garrido:** *A new dynamical model of rectified output AC generators,* Electric Machines and Electromechanics, vol. 3, n.º 1, 1979.

[4] — **L. Baes, H. Buyse & L. Pierrat:** *Etablissement de la fonction de transfert de la génératrice à redresseur,* Bulletin de D. E. R. de l'EdF, série B, n.º 2, 1976.

[5] — **H. Buyse & L. Pierrat:** *Limit of intrinsic stability of a synchronous machine supplying an inductive load through a rectified,* Int. Conf. Electrical Machines, Wien, Sep. 1976.

[6] — **Hanson & Thiry:** *Modélisation mathématique de l'excitatrice sans balais des machines synchrones,* TFE, U. C. Louvain, 1978.

[7] — **H. Buyse:** *Contribution à l'étude de la machine à commutation electronique,* Thèse de Doctorat, U. C. Louvain, 1976.

[8] — **L. Baes & M. S. Garrido:** *Compléments à l'étude du redressements triphasé classique,* Revue E, vol. VIII, n.º 1, 1975.

[9] — **E. Cornell & T. Lipo:** *Modeling & design of controlled current induction motor drive système,* IEEE Trans. Ind. Ap., vol. IA-13, n.º 4, July/August, 1977.

[10] — **N. Sato, M. Ishida & N. Sawaki:** *Some characteristics of induction motor driven by current--source inverter,* I E E E / I A S Semiconductor Power Converter Conference, 1977.

[11] — **N. Sawaki & N. Sato:** *Steady-state and stability analysis of induction motor driven by current — source inverter,* I E E E Trans. Ind. Ap., vol. IA-13, n.º 3, May/June, 1977.

[12] — **J. Santana:** *Étude de la stabilité du moteur à induction alimenté par onduleur de courant,* mémoire de Maitrise, U. C. Louvain, 1979.

[13] — **D. C. White & H. H. Woodson:** *Electromechanical energy conversion,* Ed. John Willey, 1959.

[14] — **E. Gudefin:** *Les machines à commutation electronique* R. G. E., n.º 1 Janv. 1968.

técnica

REVISTA DE ENGENHARIA

associação dos estudantes do instituto superior técnico

Av. Rovisco Pais — 1000 Lisboa — Portugal — Telefone 88 93 23 — Telegramas AEIST

TABELA DE PREÇOS DE ANÚNCIOS

ADVERTISEMENT RATES

	1 página page	1/2 página page	1/4 página page
2.ª ou 3.ª capas 2nd & 3rd cover	8000$00	6400$00	4000$00
4.ª capa 4th cover	9600$00	—	—
Última página antes do texto Last page before text	6400$00	—	—
Páginas intercaladas no texto Pages in text	5600$00	4000$00	3200$00
Qualquer outra página Any other page	4800$00	3200$00	2400$00

Publicidade redigida — Agravamento de 100 %
Editorial advertising — 100 % more

Encartes — Por cada folha tamanho A4 será cobrado o preço de 1 página.
Inserts — For each sheet A4 (297 × 210 mm) the price of one page.

Descontos: 5 números 20 %
Dicounts: 10 insertions 40 %

Anúncios a cores: **mais**
Colour advertisements: plus 1500$00

por cada cor
per colour

Os anúncios são pagos depois da publicação.
Advertisement are paid after publication.

1. **Tiragem:**
   Circulation: 3000
2. **Línguas utilizadas na revista: Português, Inglês e Francês**
   Languages used in our journal: Portuguese, English and French
3. **Tipo de leitores: Engenheiros e estudantes de engenharia**
   Type of readershipe: Engineers and engineering students
4. **Periodicidade: Mensal (excepto Agosto e Setembro)**
   Frequency: Monthly (except August and September)
5. **Tipo de impressão: Tipografia. Anúncios em offset**
   Screen: 120. Printing process: Typography. Advertisements in offset
6. **Mancha:**
   Type area: 16,5×25 cm
7. **N.º de colunas:**
   No. of columns: 2
   Altura da coluna:
   Column depth: 25 cm
   Largura da coluna:
   Column width: 8 cm
8. **Material de impressão usado: Qualquer**
   Press maetrial required: Any
9. **Número corrente de páginas:**
   Usual number of pages: 60
10. **Cores possíveis: Quaisquer**
    Colours available: Any
11. **Comissão de agência:**
    Agent comission: 20 %

HIDRÁULICA GERAL

Pelo Professor

Alberto Abecassis Manzanares

1.º VOLUME

— **FUNDAMENTOS TEÓRICOS** Preço 675$00

2.º VOLUME

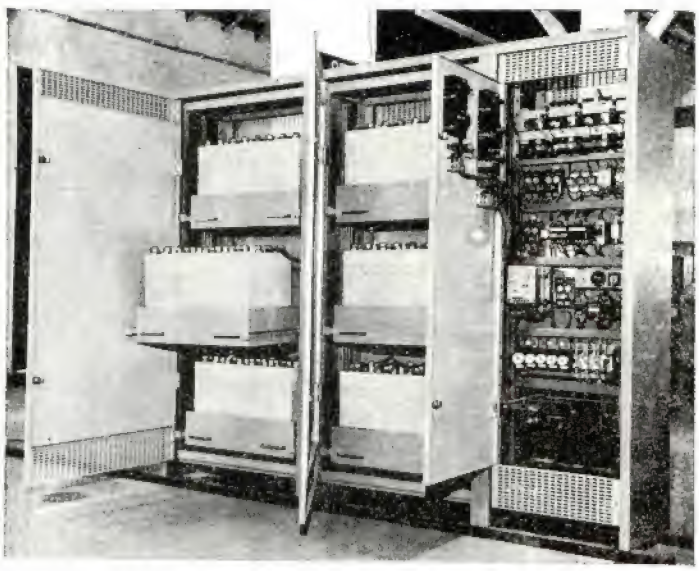
— **ESCOAMENTOS LÍQUIDOS**

(A SAIR BREVEMENTE)

PEDIDOS À TÉCNICA

TUDOR

Alimentadores de C.C. para Serviço Estacionário



BLOCO para alimentação de permanência e Socorro dos equipamentos de Protecção e Comando dos Serviços Auxiliares das subestações.
Fabricado para a EDP e E.P.

A TUDOR projecta e fabrica alimentadores e carregadores de baterias para todos os fins obedecendo às mais exigentes especificações.

Características Eléctricas

Carregador Principal

- Tensão de alimentação . . 3 x 380 V ± 10% 50 Hz ± 5%
- Potência Nominal . . . . .3x3 KW
- Funcionamento . . . . . .Regime flutuante estabilizado

Carregador Adicional

- Potência Nominal . . . . .0,3 KW
- Funcionamento . . . . . .Regime Tampão

Bateria

- Alcalina de Cádmio Níquel

SOCIEDADE PORTUGUESA DO ACUMULADOR TUDOR, SARL. R. Actor Tasso 1 — Tel. 56 21 12

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 454

Ano LIV — Novembro 1979

GARRIDO, M. S. — *Algumas considerações sobre a electromecânica quasi-estacionária dos meios contínuos*, «Técnica», Lisboa, LIV (454) Nov. 1979, p. 59-70.

O artigo mostra que, em electromecânica quasi-estacionária, é preferível adoptar, logo à partida, a realtividade galileana. A razão é que uma teoria mais geral a partir da qual se pudesse, de maneira consistente, deduzir a electromecânica quasi-estacionária, só poderá existir a um nível demasiado complexo para as aplicações.

Estas conclusões são obtidas a partir de uma nova formulação da mecânica dos fluidos incompressíveis, análoga à teoria do electromagnetismo, que permite um tratamento paralelo das duas disciplinas.

LABRIQUE, F. — *Estudo da comutação num gerador polifásico com rectificação.* Parte I — *Análise do gerador com estrutura sinusoidal*, «Técnica», Lisboa, LIV (454) Nov. 1979, p. 71-81.

Este artigo é a primeira parte de um estudo de comutação dum gerador polifásico sem colector. A partir do estudo de dois casos limite, o «sinusoidal» apresentado nesta primeira parte e o «triangular» apresentado na segunda parte, mostra-se que a forma das indutâncias mútuas, em função da posição, pode afectar consideravelmente o processo de comutação e, por conseguinte, a característica externa do gerador.

Resultados experimentais confirmam as previsões teóricas.

LABRIQUE, F. — *Estudo da comutação num gerador polifásico com rectificação.* Parte II — *Análise do gerador com estrutura triangular*, «Técnica», Lisboa, LIV (454) Nov. 1979, p. 83-95.

Este artigo é a segunda parte dum estudo sobre a comutação dum gerador polifásico sem colector. A partir de dois casos limite, o «triangular» aqui apresentado e o «sinusoidal» já apresentado na primeira parte, mostra-se que a lei de variação das inductâncias mútuas das espiras em função da posição pode afectar consideravelmente o processo de comutação e, por conseguinte, a característica externa do gerador.

A análise teórica é confirmada por resultados experimentais obtidos com máquinas de laboratório.

LOURTIE, Isabel; CARVALHAL, Francisco e **LOURTIE, Pedro** — *Projecto apoiado em computador de sistemas de controlo*, «Técnica», Lisboa, LIV (454) Nov. 1979, p. 97-109.

O artigo descreve detalhadamente o bloco de manipulação e tratamento de dados de um conjunto articulado de programas para o projecto apoiado em computador de sistemas de controlo. Apresentam-se os algoritmos utilizados e os correspondentes fluxogramas para além de alguns exemplos que os ilustram.

SANTANA, J. — *Modelação e estabilidade da associação ondulador de corrente-máquina assíncrona*, «Técnica», Lisboa, LIV (454) Nov. 1979, p. 111-118

A associação ondulador de corrente-máquina assíncrona constitui um sistema para o qual as equações dos circuitos de contactos deslizantes são de aplicação imediata.

A complexidade do estudo da estabilidade do sistêma leva-nos a introduzir hipóteses de simplificação que o tornam viável analiticamente. Desta maneira é possível considerar dois tipos de instabilidades: eléctricas e mecânicas.

A modificação dos parâmetros para assegurar a estabilidade de associação ondulador de corrente-máquina assíncrona não pode ser vista como uma solução, porque assim se é conduzido a sistemas de baixo rendimento.

Com a introdução de cadeias de retroacção obtém-se sistemas estáveis sem modificar as boas performances da máquina assíncrona. Os controlos da corrente contínua de alimentação e da frequência de escorregamento, com efeitos complementares, permitem eliminar os tipos de instabilidade considerados.

GARRIDO, M. S. — *Estudo analítico e aplicação das equações variacionais de geradores AC com saída rectificada*, «Técnica», Lisboa, LIV (454) Nov. 1979, p. 119-131.

São introduzidas as principais constantes de tempo que intervêm no funcionamento variacional dos geradores de rectificação e justificados vários níveis possíveis de simplificação. Os resultados obtidos são aplicados ao estudo da função de transferência das excitatrizes sem escovas e ao estudo da estabilidade do motor de indução alimentado por ondulador de corrente.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.º 454

LIV — November 1979

LOURTIE, Isabel; CARVALHAL, Francisco e LOURTIE Pedro — *Control systems design computer aided,* «Técnica», Lisboa, LIV (454) Nov. 1979, p. 97-109.

The paper describes with detail the data manipulation and data preparation block of a control systems computer-aided design package. The algoritms and corresponding flow charts are presented together with some application examples.

SANTANA, J. — *Modeling and stability of induction motor driven by current source inverter,* «Técnica», Lisboa, LIV (454) Nov. 1979, p. 111-118.

This paper presents a dynamic model for the induction motor driven by current source inverter, which is developped as an application of the commutation circuits theory.

An analytical study of the system stability is possible with the introduction of simplifying hypothesis in the mathematical model. We will consider two types of instabilities: electrical and mechanical.

It is shown that the actions on the parameters to obtain the stability induce to systems with poor efficiency. The solution is the introduction of the feed-back loops.

The controls of the direct current and of the slip frequency with complementary effects leave out the two types of instabilities: the first one is equivalent to the increase of the stator resistance and so it is able to eliminate the electrical instability, the second one eliminates the steady instability bringing an electromechanical decrescent characteristics in the system.

GARRIDO, M. S. — *Analytical study and application of the small signal equations of the rectified output AC generators,* «Técnica», Lisboa, LIV (454) Nov. 1979, p. 119-131.

This paper introduces the main time constants that influence the small signal behaviour of the rectified output AC generators and presents some reasonable simplifications. The results so obtained are used to study the transfert function of the brushless exciter and to study the stability of the induction motor driven by current source inverter.

GARRIDO, M. S. — *Some remarks on the quasi-static electromechanics of continuous media,* «Técnica», Lisboa, LIV (454) Nov. 1979, p. 59-70.

It is show that, in formulating quasistatic electromechanics, galilean relativity is preferably used from the start. This is because a more general theory from which electromechanics would have to be consistently derived could only exist at a level of excessive complexity in comparison with the requirements of applications.

This conclusion is reached by setting up a new formulation, similar to the electromagnetic theory, for incompressible fluid mechanics. This allows a parallel treatment of both theories.

LABRIQUE, F. — *Study of the commutation processes in a polyphase rectified output AC generator.* Part on — *Analysis of the generator with sinusoidal coupling,* «Técnica», Lisboa, LIV (454) Nov. 1979, p. 71-81.

This paper is the first part of a study on the commutation processes in a polyphase commutatorless D. C. generator. From the study of two limit cases, the «sinusoidal» one presented here and the «triangular» one presented in the second part, it will be shown that the form of the variation of the mutual inductances as a function of the relative positions of the different coils can affect considerably the commutation processes and hence the generator output characteristic.

Experimental results on laboratory test machines confirm the theoretical analysis.

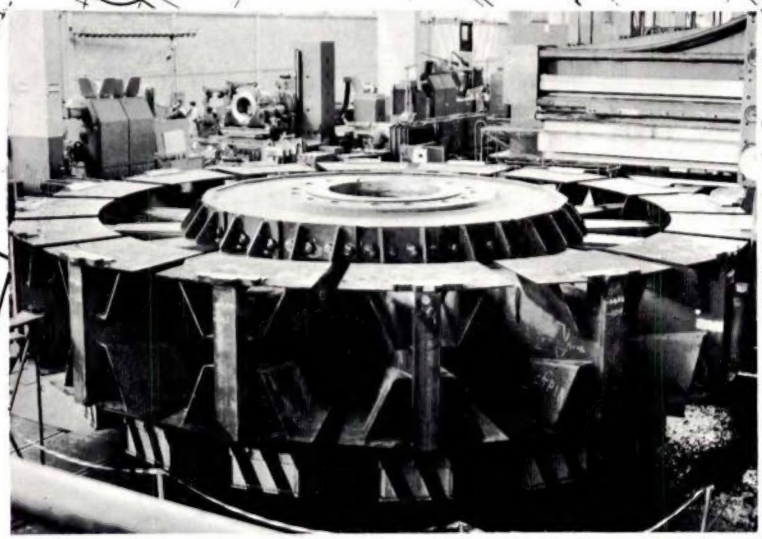
LABRIQUE, F. — *Study of the commutation processes in a polyphase rectified output AC generator.* Part two — *Analysis of the generator with triangular coupling,* «Técnica», Lisboa, LIV (454) Nov. 1979, p. 83-95.

This paper is the second part of a study on the commutation processes in a polyphase commutatorless DC generator. From the study of two limit cases, the «triangular» one presented here and the «sinusoïdal» one, yet presented in the first part, it is shown that the form of the variation of the mutual inductances as a function of the relative positions of the different coils can affect considerably the commutation processes and hence the generator output characteristic.

Experimental results on laboratory test machines confirm the theoretical analysis.

PRIMEIRO ALTERNADOR MOTOR FABRICADO EM PORTUGAL

AGUIEIRA



Rotor alternador em fase de maquinagem

Destinado à Central Hidroeléctrica da Aguieira e sob licença da Alsthom-Atlantique a Sorefame fabrica o primeiro Alternador Motor tendo como principais características:

Potencia	100 MVA
Velocidade de rotação	125 r. p. m.
Tensão nominal	12 000 volts
Diâmetro exterior	11,5 m
Diâmetro da parte girante	9,5 m
Peso do rotor	225 toneladas
Peso total	420 toneladas

SOREFAME

SOCIEDADES REUNIDAS DE FABRICAÇÕES METÁLICAS, S.A R L.

Amadora – Portugal

Edições da Técnica

TABELA DE PREÇOS

TABELAS PARA O CÁLCULO DO BETÃO ARMADO

Brazão Farinha, 6.ª edição — 1970 . . . 600$00

TOPOGRAFIA GERAL

C. Xerez — 1.º vol. 3.ª edição — 1978 . . 460$00
C. Xerez — 2.º vol. 2.ª edição — 1966 . . (*)

TABELAS TÉCNICAS

Vicente Ferreira e Brazão Farinha, 8.ª edição 1977 700$00

MANUAL DE HIDRÁULICA GERAL

A. Lencastre, 2.ª edição — 1969 . . . . 580$00

DICIONÁRIO DE UNIDADES E TABELAS DE CONVERSÃO

Vasco Costa e Osvaldo Francês, 1.ª edição — 1959 (*)

NÚMEROS E VARIÁVEIS COMPLEXAS

A. H. Simões de Abreu, 1.ª edição — 1977 . 400$00

GUIA DE ANÁLISE QUÍMICA DAS ÁGUAS

A. Herculano de Carvalho, 1.ª edição — 1961 200$00

CÁLCULO DE PÓRTICOS

G. Kani — Trad. da 7.ª edição alemã — 1962 150$00

MANUAL DE ESTRUTURAS

Brazão Farinha — 1.º vol. 1.ª edição — 1976 750$00

2.º e 3.º Volumes . . . . . (*)

BETÃO PREESFORÇADO

(A cargo dos participantes na Semana de Betão Preesforçado — I. S. T. — 1975) . . 550$00

HIDRÁULICA GERAL

1 — Fundamentos teóricos, 1.ª ed. — 1979 675$00
2 — Escoamentos Líquidos . . . . . (*)

A. Manzanares

PROPAGAÇÃO E RADIAÇÃO DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

1 — Ondas e Meios Materiais, 1.ª ed. - 1979 560$00
2 — Radiação . . . . . (*)

M. de Abreu Faro

Monografia n.º 1

CAUDAL PARA DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS HIDRÁULICAS E AMORTECIMENTO DE CHEIAS EM ALBUFEIRAS

António Carvalho Quintela e António Betâmio de Almeida, 1.ª edição — 1975 . . . 10$00

Monografia n.º 2

ESCOAMENTO COM SUPERFÍCIE LIVRE EM CANAIS DE SECÇÃO CIRCULAR

António Betâmio de Almeida, 1.ª ed. — 1978 30$00

(*) LIVROS A PUBLICAR BREVEMENTE

Desconto de 10% aos assinantes

PEDIDOS À **técnica**